UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PRUEBA Nº 2 CÁLCULO INTEGRAL + EDO

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Lu 26/10/15

1) Muestre que : $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \pi$

(15 puntos).

Solución:

Tenemos que:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \lim_{p\to 0^+} \int_p^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx + \lim_{q\to\infty} \int_1^q \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$$

Calculemos $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$

Sea $z^2 = x$, luego $2z\,dz = dx\,,\quad 1+x = 1+z^2$ y $\sqrt{x} = z.$ Reemplazando en la integral, se tiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \int \frac{2z}{z\,(1+z^2)}\,dz = 2\int \frac{1}{1+z^2}\,dz = 2\,Arctg(z) = 2\,Arctg(\sqrt{x}\,)$$

Ahora

$$\int_p^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)} = 2Arctg(\sqrt{x}\,)\Big|_p^1 = 2Arctg(1) - 2Arctg(\sqrt{p}\,)$$

$$\int_1^q \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = 2Arctg(\sqrt{x}\,)\Big|_1^q = 2Arctg(\sqrt{q}\,) - 2Arctg(1)$$

De donde

$$\lim_{p\to 0^+} \int_p^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \lim_{p\to 0^+} \left[2Arctg(1) - 2Arctg(\sqrt{p}\,)\right]$$

$$= 2Arctg(1) - 2\lim_{p\to 0^+} Arctg(\sqrt{p}\,) = 2Arctg(1) - 0 = 2Arctg(1)$$

y

$$\lim_{q\to\infty} \int_1^q \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \lim_{q\to\infty} \left[2Arctg(\sqrt{q}\,) - 2Arctg(1)\right]$$

$$= 2 \lim_{q\to\infty} Arctg(\sqrt{q}\,) - 2Arctg(1) = 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2Arctg(1) = \pi - 2Arctg(1)$$

Finalmente

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \lim_{p\to 0^+} \int_p^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx + \lim_{q\to\infty} \int_1^q \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$$

$$= 2Arctg(1) + \pi - 2Arctg(1) = \pi$$

Lo anterior muestra que : $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \pi$ ❑

2) Resuelva la ecuación de crecimiento logístico $y' = k\,y\,(M-y)$, donde k y M son constantes.

(15 puntos).

Solución:

$$y' = k\,y\,(M-y) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = k\,y\,(M-y) \Rightarrow \frac{dy}{y\,(M-y)} = k\,dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y\,(M-y)} = \int k\,dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y\,(M-y)} = k\,t$$

Para calcular $\displaystyle\int \frac{dy}{y\,(M-y)}$, usaremos descomposición en suma de fracciones parciales

$$\frac{1}{y\,(M-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{M-y} \Rightarrow 1 = A(M-y) + B\,y$$

Para $y = 0$, se tiene $1 = A\,M$, de donde $A = \frac{1}{M}$, con $M \neq 0$

Para $y = M$, se tiene $1 = B\,M$, de donde $B = \frac{1}{M}$, con $M \neq 0$

Luego

$\frac{1}{y\,(M-y)} = \frac{1}{M}\frac{1}{y} + \frac{1}{M}\frac{1}{M-y}$

De donde, $\int \frac{dy}{y\,(M-y)} = \frac{1}{M}\int \frac{1}{y}dy + \frac{1}{M}\int \frac{1}{M-y}dy = \frac{1}{M}\,ln|\,y\,| - \frac{1}{M}\,ln|\,M - y\,|$

$= \frac{1}{M}ln\left|\frac{y}{M-y}\right|$

Así

$\frac{1}{M}ln\left|\frac{y}{M-y}\right| = kt + c \Rightarrow ln\left|\frac{y}{M-y}\right| = Mkt + Mc \Rightarrow \frac{y}{M-y} = d\,e^{Mkt}$,

con $d = e^{Mc}$ constante $\Rightarrow y = M\,d\,e^{Mkt} - y\;\; d\,e^{Mkt} \Rightarrow (1 + d\,e^{Mkt})\,y = M\,d\,e^{Mkt}$

$\Rightarrow y(t) = \frac{M\,d\,e^{Mkt}}{1+d\,e^{Mkt}}$

Si $M = 0$, entonces la EDO a resolver es $y\,' = -\,k\,y^2$

$y\,' = -\,k\,y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\,k\,y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = -\,k\,dt \Rightarrow y^{-2}dy = -\,k\,dt$

$\Rightarrow \int y^{-2}dy = \int -\,k\,dt \Rightarrow -\,y^{-1} = -\,k\,t + c \Rightarrow \frac{1}{y} = kt - c \Rightarrow y(t) = \frac{1}{kt-c}$, con c constante real. ❑

3) Resuelva $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^t}}\,dt$

(15 puntos).

<u>Solución:</u>

Para calcular $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^t}}\,dt$ usaremos la sustitución racionalizante $z^2 = 1 + e^t$

$z^2 = 1 + e^t \Rightarrow e^t = z^2 - 1$

$z^2 = 1 + e^t \Rightarrow 2z\,dz = e^t\,dt \Rightarrow 2\,z\,dz = (z^2 - 1)\,dt \Rightarrow dt = \frac{2z}{z^2-1}\,dz = dt$

Reemplazando en la integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^t}}\,dt \;= \int \frac{1}{z}\,\frac{2z}{z^2-1}\,dz = 2\;\int \frac{1}{z^2-1}\,dz = 2\;\int \frac{1}{(z-1)(z+1)}\,dz$$

Usando fracciones parciales

$$\frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} \Rightarrow 1 = A(z+1) + B(z-1)$$

Para $z = 1$, se tiene : $1 = 2\,A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

Para $z = \; -1$, se tiene : $1 = \; -2\,B \Rightarrow B = \; -\frac{1}{2}$

Luego

$$\frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{z+1}$$

Así, $\int \frac{1}{(z-1)(z+1)}\,dz = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z-1}dz - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z+1}dz = \frac{1}{2}\,ln|\,z-1| - \frac{1}{2}\,ln|\,z+1|$

Finalmente

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^t}}\,dt \;= 2\;\int \frac{1}{(z-1)(z+1)}\,dz = ln|\,z-1| - ln|\,z+1| + c = ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + c$$

$= ln\left|\frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1}\right| + c$, con c una constante real.

4) Obtenga $\int \frac{dm}{2+cos(m)}$

(15 puntos).

Solución:

Si $u = tg(\frac{m}{2})$, entonces $dm = \frac{2\,du}{1+u^2}$, $cos(m) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ y

$$\int \frac{dx}{1+cos(m)} = \int \frac{\left[\frac{2}{1+u^2}\right]du}{2+\left[\frac{1-u^2}{1+u^2}\right]} = \int \frac{2du}{3+u^2} = 2\int \frac{du}{3+u^2}$$

Ahora, usando la sustitución trigonométrica $u = \sqrt{3}\,tg(\theta)$ se tiene $du = \sqrt{3}sec^2(\theta)$ y $\theta = Arctg(\frac{u}{\sqrt{3}})$

Reemplazando en la integral,

$$2\int \frac{du}{3+u^2} = 2\int \frac{\sqrt{3}\,sec^2(\theta)dx}{3+\left[\sqrt{3}\,tg(\theta)\right]^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{sec^2(\theta)d\theta}{1+\,tg^2(\theta)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}\theta + c$$

Pero $u = tg(\frac{m}{2})$, así $\theta = Arctg\left[\frac{1}{\sqrt{3}}tg(\frac{m}{2})\right]$, por lo tanto

$$\int \frac{dm}{2+cos\,(m)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}Arctg\left[\frac{1}{\sqrt{3}}tg(\frac{m}{2})\right] + c$$

Finalmente,

$$\int \frac{dm}{2+cos\,(m)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}Arctg\left[\frac{1}{\sqrt{3}}tg(\frac{m}{2})\right] + c\ ,$$

con c una constante real cualquiera. $\square$