UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 2 CÁLCULO INTEGRAL + EDO

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL – INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Mi 13/11/13

1) Resuelva las integrales

$a) \quad \int \sqrt{1-e^x}\; dx$

Solución:
Usemos una sustitución racionalizante del tipo z^n, con $n=2$

$z^2 = 1 - e^x \Rightarrow e^x = 1 - z^2$

$z^2 = 1 - e^x \Rightarrow 2z\,dz = -e^x\,dx \Rightarrow 2z\,dz = (z^2-1)\,dx \Rightarrow dx = \frac{2z}{z^2-1}\,dz$

$\int \sqrt{1-e^x}\; dx = \int z\,\frac{2z}{z^2-1}\,dz = 2\int \frac{z^2}{z^2-1}\,dz$

Dividamos:

$z^2 \;:\; z^2-1 = 1$
$^{(-)}z^2 - {}^{(+)}1$
$--------$
$\quad 1$

De la división se tiene que: $\frac{z^2}{z^2-1} = 1 + \frac{1}{z^2-1}$

Luego:

$\int \frac{z^2}{z^2-1}\,dz = \int dz + \int \frac{1}{z^2-1}\,dz = z + \int \frac{1}{z^2-1}\,dz$

Para calcular $\int \frac{1}{z^2-1}\,dz$ usemos fracciones parciales:

$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} \;\Rightarrow$

$1 = A(z+1) + B(z-1)$

Evaluemos lo anterior en $z = 1$:

$1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

Evaluemos en $z = -1$:

$1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

Así $\quad \frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+1}$

Integrando la igualdad anterior :

$$\int \frac{1}{z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z-1}\,dz - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z+1}\,dz = \frac{1}{2}\,ln(z-1) - \frac{1}{2}\,ln(z+1)$$

Luego:

$$\int \frac{z^2}{z^2-1}\,dz = z + \int \frac{1}{z^2-1}\,dz = z + \frac{1}{2}\,ln(z-1) - \frac{1}{2}\,ln(z+1)$$

Volviendo a la variable original:

$$\int \sqrt{1-e^x}\;dx = 2\int \frac{z^2}{z^2-1}\,dz = 2z + ln(z-1) - ln(z+1) =$$

$$2\sqrt{1-e^x} + ln(\sqrt{1-e^x} - 1) - ln(\sqrt{1-e^x} + 1) + c$$

Finalmente

$$\int \sqrt{1-e^x}\;dx = 2\sqrt{1-e^x} + ln(\sqrt{1-e^x} - 1) - ln(\sqrt{1-e^x} + 1) + c$$

donde c es una constante real cualquiera. ❑

$b) \quad \int \frac{cos(x)}{sen^2(x)+sen(x)}\ dx$

Solución:

Sabemos que

$sen(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

$cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt$

Luego

$$\int \frac{cos(x)}{sen^2(x)+sen(x)}\ dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}+\frac{2t}{1+t^2}}\ \frac{2}{1+t^2}\ dt = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{4t^2+2t(1+t^2)}{(1+t^2)^2}}\ \frac{2}{1+t^2}\ dt =$$

$$\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{4t^2+2t+2t^3}{(1+t^2)^2}}\ \frac{2}{1+t^2}\ dt = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\ \frac{(1+t^2)^2}{4t^2+2t+2t^3}\ \frac{2}{1+t^2}\ dt = 2\int \frac{1-t^2}{2t(t^2+2t+1)}\ \ dt =$$

$$\int \frac{(1-t)(1+t)}{t(t^2+2t+1)}\ dt = \int \frac{(1-t)(1+t)}{t\,(t+1)^2}\ dt = \int \frac{(1-t)}{t\,(t+1)}\ dt$$

Ahora para calcular $\int \frac{(1-t)}{t\,(t+1)}\ dt$ usemos fracciones parciales.

$$\frac{(1-t)}{t\,(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}\ \Rightarrow 1 - t = A(t+1) + B\,t$$

Para $t = 0$ se tiene que: $1 = A \Rightarrow A = 1$

Para $t = -1$ se tiene que: $2 = -B \Rightarrow B = -2$

Así

$$\int \frac{(1-t)}{t\,(t+1)}\ dt = \int \frac{1}{t}dt - 2\int \frac{1}{t+1}dt = ln(t) - 2\ ln(t+1) + c$$

Volviendo a la variable original y recordando que $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$, finalmente se tiene que:

$$\int \frac{cos(x)}{sen^2(x)+sen(x)}\ dx = ln\left[tg\left(\frac{x}{2}\right)\right] - 2\ ln\left[tg\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right] + c$$

donde c es una constante real cualquiera. ❑

$c)\ \int_2^{\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2-4}}\, dt$

Solución:

Resolvamos la integral indefinida $\int \frac{1}{t\sqrt{t^2-4}}\, dt$

Usemos la sustitución trigonométrica $t = 2\, sec(\alpha)$

$$t = 2\, sec(\alpha) \Rightarrow dt = 2\, sec(\alpha)\, tg(\alpha)\, d\alpha$$

$$t = 2\, sec(\alpha) \Rightarrow sec(\alpha) = \frac{t}{2} \Rightarrow \alpha = Arcsec\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\sqrt{t^2-4} = \sqrt{4\, sec^2(\alpha) - 4} = 2\sqrt{sec^2(\alpha) - 1} = 2\, tg(\alpha)$$

Reemplazando en la integral se tiene:

$$\int \frac{1}{t\sqrt{t^2-4}}\, dt = \int \frac{1}{2\, sec(\alpha)\, 2\, tg(\alpha)}\, 2\, sec(\alpha)\, tg(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2}\int d\alpha = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} Arcsec\left(\frac{t}{2}\right)$$

Notemos ahora que

$$\alpha = Arcsec\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow sec(\alpha) = \frac{t}{2} \Rightarrow tg(\alpha) = \sqrt{sec^2(\alpha) - 1} = \frac{\sqrt{t^2-4}}{2}$$

$$tg(\alpha) = \frac{\sqrt{t^2-4}}{2} \Rightarrow \alpha = Arctg\left(\frac{\sqrt{t^2-4}}{2}\right)$$

De lo anterior se tiene que:

$$\int \frac{1}{t\sqrt{t^2-4}}\, dt = \frac{1}{2} Arctg\left(\frac{\sqrt{t^2-4}}{2}\right)$$

Por otro lado

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2-4}}\, dt = \lim_{a\to 2^+} \int_a^3 \frac{1}{t\sqrt{t^2-4}}\, dt + \lim_{b\to\infty} \int_3^b \frac{1}{t\sqrt{t^2-4}}\, dt =$$

$$\lim_{a\to 2^+} \frac{1}{2} Arctg\left(\frac{\sqrt{t^2-4}}{2}\right)\Bigg|_a^3 + \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} Arctg\left(\frac{\sqrt{t^2-4}}{2}\right)\Bigg|_3^b =$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{a\to 2^+}\left[Arctg\left(\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[Arctg\left(\frac{\sqrt{b^2-4}}{2}\right)\right]=$$

$$-\frac{1}{2}\left[Arctg\left(0\right)\right]+\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[Arctg\left(\frac{\sqrt{b^2-4}}{2}\right)\right]=0+\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

Finalmente

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{t\sqrt{t^2-4}}\,dt=\frac{\pi}{4}\quad\square$$

(30 puntos).

2) Obtenga el área de la región acotada por $y=2x$ y $y=x^2-4x$. Grafique la región correspondiente.

(15 puntos).

<u>Solución:</u>

Obtengamos los puntos de intersección entre las curvas.

$$2x=x^2-4x\Rightarrow x^2-6x=0\Rightarrow x(x-6)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=6\end{cases}$$

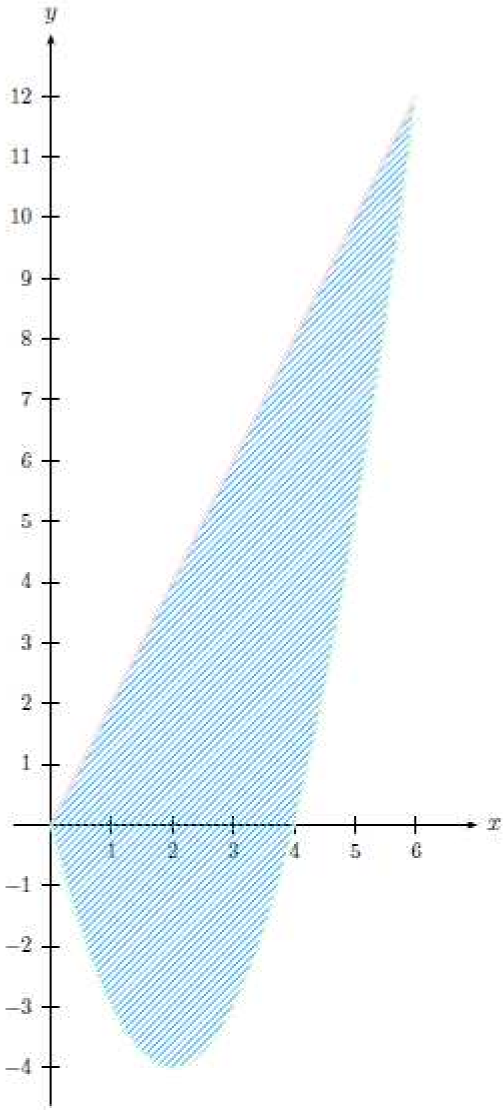
Los puntos de intersección son $P_1=(x_1,y_1)=(0,0)$ y $P_2=(x_2,y_2)=(6,12)$

Antes de graficar notemos que $y=2x$ es una recta y $y=x^2-4x$ es una parábola con vértice en $(2,-4)$ y que apunta hacia arriba, pues

$$y=x^2-4x\Rightarrow y=(x-2)^2-4\Rightarrow y+4=(x-2)^2$$

Dado que $x^2-4x=0\Rightarrow x(x-4)=0\Rightarrow x=0$ ó $x=4$, la parábola interseca al eje x en $x=0$ y en $x=4$

Con todo lo anterior en mente la gráfica de la región está dada por la siguiente figura.



Calculemos el área de la región anterior.

$$A = \int_0^6 \left[(2x - (x^2 - 4x)\right] dx = \int_0^6 \left[2x - x^2 + 4x\right] dx = \int_0^6 \left[6x - x^2\right] dx =$$

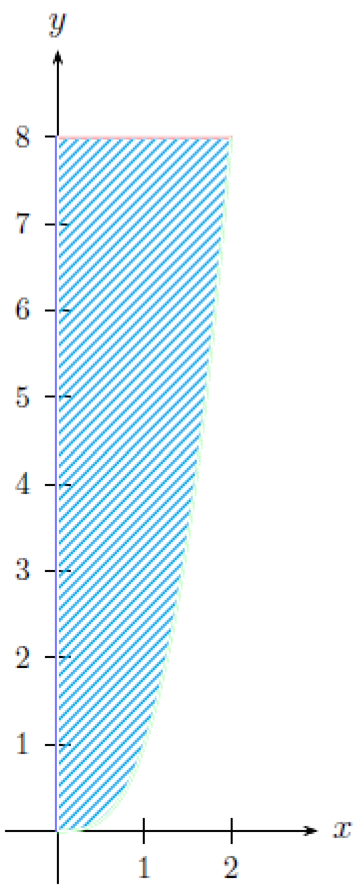
$$\int_0^6 6x\, dx - \int_0^6 x^2\, dx = \left(3\,x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^6 = 108 - 72 = 36$$

Finalmente el área de la región acotada por $y = 2x$ y $y = x^2 - 4x$ es igual a 36 unidades de área. ❑

3) Calcule el volumen del sólido obtenido al rotar la región acotada por $y = x^3$, $y = 8$ y $x = 0$, alrededor del eje y. Grafique la región correspondiente.

(15 puntos).

Solución:



Notemos que: $y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$

De la gráfica se observa que el intervalo a considerar va de $y = 0$ a $y = 8$

$$V = \pi \int_0^8 \sqrt[3]{y^2}\, dy = \pi \int_0^8 y^{2/3}\, dy = \pi\, \frac{3}{5}\, y^{5/3}\Big|_0^8 = \frac{96}{5}\,\pi$$

Finalmente, el volumen V del sólido obtenido al rotar la región acotada por $y = x^3$, $y = 8$ y $x = 0$, alrededor del eje y es:

$V = \frac{96}{5}\,\pi$ ❑