UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 2 CÁLCULO INTEGRAL + EDO

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :____ CARRERA :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 30 MINUTOS FECHA : Ma 18/06/19

1) Se define la función $\Gamma(x)$ para $x > 0$ como $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$

Usando la definición anterior, calcule $\Gamma(2)$

(15 ó 20 puntos).

<u>Solución:</u>
Calculemos $\Gamma(2) = \int_0^{\infty} t^{2-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t\, e^{-t} dt = \lim\limits_{a\to\infty} \int_0^{a} t\, e^{-t} dt$
Resolvamos la integral $\int t\, e^{-t} dt,$ usando integración por partes.

$p' = e^{-t} \Rightarrow p = -e^{-t}$
$q = t \Rightarrow q' = 1$

$$\int t\, e^{-t} dt = -t\, e^{-t} + \int e^{-t} dt = -t\, e^{-t} - e^{-t} = -(t+1)\, e^{-t}$$

Luego, $\int_0^{a} t\, e^{-t} dt = -(t+1)\, e^{-t}\Big|_0^a = -(a+1)\, e^{-a} + 1$
Finalmente, $\Gamma(2) = \lim\limits_{a\to\infty} \int_0^{a} t\, e^{-t} dt = \lim\limits_{a\to\infty} \Big[-(a+1)\, e^{-a} + 1 \Big]$

$$= 1 - \lim_{a\to\infty} \frac{-(a+1)}{e^t} =^{L'H} 1 - \lim_{a\to\infty} \frac{-1}{e^t} = 1 + 0 = 1 \ \square$$

2) Resuelva $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}\, dx$

(15 ó 20 puntos).

<u>Solución:</u>
Sea $z^6 = x$
$z^6 = x \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{z^6} = z^{\frac{6}{2}} = z^3$
$z^6 = x \Rightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{z^6} = z^{\frac{6}{3}} = z^2$
$z^6 = x \Rightarrow 6z^5\, dz = dx$

Reemplazando

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{z^3}{z^3-z^2}\,6z^5\,dz = 6\int \frac{z^3}{z^2(z-1)}\,z^5\,dz = 6\int \frac{z}{z-1}\,z^5\,dz$$

$$= 6\int \frac{z^6}{z-1}\,dz$$

Por otro lado $z^6 \;:\; z-1 \;=\; z^5+z^4+z^3+z^2+z+1$

$$\begin{array}{l}
{}^{(-)}\,z^6 - {}^{(+)}z^5 \\
\hline
\qquad z^5 \\
\qquad {}^{(-)}\,z^5 - {}^{(+)}z^4 \\
\hline
\qquad\qquad z^4 \\
\qquad\qquad {}^{(-)}z^4 - {}^{(+)}z^3 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad {}^{(-)}\,z^3 - {}^{(+)}z^2 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad z^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad {}^{(-)}z^2 - {}^{(+)}z \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad {}^{(-)}z - {}^{(+)}1 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1
\end{array}$$

De lo anterior, se tiene que $\frac{z^6}{z-1} \;=\; z^5+z^4+z^3+z^2+z+1+\frac{1}{z-1}$

Luego

$$6\int \frac{z^6}{z-1}\,dz$$

$$= 6\int z^5dz + 6\int z^4dz + 6\int z^3dz + 6\int z^2dz + 6\int z\,dz + 6\int dz + 6\int \frac{1}{z-1}\,dz$$

$$= \; z^6 + \frac{6}{5}\,z^5 + \frac{6}{4}\,z^4 + \frac{6}{3}\,z^3 + \frac{6}{2}\,z^2 + 6z + 6ln|\,z-1\,| + c$$

$$= z^6 + \frac{6}{5}\,z^5 + \frac{3}{2}\,z^4 + 2\,z^3 + 3\,z^2 + 6z + 6ln|\,z-1\,| + c$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$$

$$= x + \frac{6}{5}\,x^{5/6} + \frac{3}{2}\,x^{4/6} + 2\,x^{3/6} + 3\,x^{2/6} + 6\,x^{1/6} + 6\,ln\big|\,x^{1/6}-1\,\big| + c$$

$$= x + \frac{6}{5}\,x^{5/6} + \frac{3}{2}\,x^{2/3} + 2\,x^{1/2} + 3\,x^{1/3} + 6\,x^{1/6} + 6\,ln\big|\,x^{1/6}-1\,\big| + c \;\square$$

3) Sea R la región acotada por $y = -x^2 + 4$ y la recta que pasa por los puntos $(-1, 3)$ y $(2, 0)$. Calcule el área de la región R

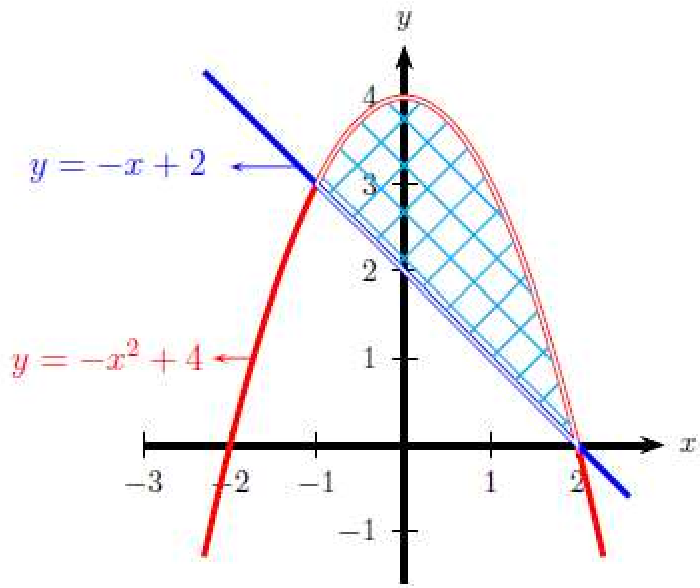
(15 ó 20 puntos).

__Solución:__

Obtengamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 3)$ y $(2, 0)$

$$y - 0 = \frac{3-0}{-1-2}(x-2) \Rightarrow y = -1(x-2) \Rightarrow y = -x + 2$$

Por otro lado, $y = -x^2 + 4$ representa una parábola con vértice en $(0, 4)$, pues, la curva dada se puede escribir como $y - 4 = -x^2$



Si A representa el área de la región R anterior, entonces:

$$A = \int_{-1}^{2} \Big[(-x^2 + 4) - (-x + 2)\Big] dx = \int_{-1}^{2} \Big[-x^2 + x + 2\Big] dx$$

$$= \Big[-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + 2x\Big]\Big|_{-1}^{2}$$

$$= \Big[-\tfrac{1}{3}(2)^3 + \tfrac{1}{2}(2)^2 + 2(2)\Big] - \Big[-\tfrac{1}{3}(-1)^3 + \tfrac{1}{2}(-1)^2 + 2(-1)\Big]$$

$$= \Big[-\tfrac{8}{3} + 2 + 4\Big] - \Big[\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} - 2\Big] = \tfrac{10}{3} + \tfrac{7}{6} = \tfrac{9}{2}$$

Finalmente, el área A de la región acotada por $y = -x^2 + 4$ y la recta que pasa por los puntos $(-1, 3)$ y $(2, 0)$ es $A = \frac{9}{2}$ unidades de área $\square$

4) Resuelva la ecuación de extinción-explosión $\frac{dP}{dt} = aP^2 - bP$, donde a y b son constantes positivas.

(15 ó 20 puntos).

<u>Solución:</u>

$$\frac{dP}{dt} = aP^2 - bP \Rightarrow \frac{dP}{aP^2 - bP} = dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P(aP-b)} = \int dt$$

Resolvamos la integral $\int \frac{dP}{P(aP-b)}$

$$\frac{1}{P(aP-b)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{aP-b} \Rightarrow 1 = A(aP-b) + BP$$

$$P = 0 \; : \; 1 = -bA \Rightarrow A = -\frac{1}{b}$$

$$P = \frac{b}{a} \; : \; 1 = \frac{b}{a}B \Rightarrow B = \frac{a}{b}$$

$$\int \frac{dP}{P(aP-b)} = -\frac{1}{b}\int \frac{dP}{P} + \frac{a}{b}\int \frac{dP}{aP-b} = -\frac{1}{b}\,ln|\,P\,| + \frac{1}{b}\,ln|\,aP-b| = \frac{1}{b}\,ln\left|\,\frac{aP-b}{P}\,\right|$$

Luego $\int \frac{dP}{P(aP-b)} = \int dt \Rightarrow \frac{1}{b}\,ln\left|\,\frac{aP-b}{P}\,\right| = t + c_1 \Rightarrow ln\left|\,\frac{aP-b}{P}\,\right| = bt + bc_1$

$$\Rightarrow ln\left|\,\frac{aP-b}{P}\,\right| = bt + c \Rightarrow \frac{aP-b}{P} = k\,e^{b\,t} \Rightarrow aP - b = k\,e^{b\,t}\,P \Rightarrow (a - k\,e^{b\,t})\,P = b$$

$$\Rightarrow P(t) = \frac{b}{a - k\,e^{b\,t}} \; \square$$