UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 2 CÁLCULO INTEGRAL + EDO

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____ NOTA :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Lu 02/06/14

1) Un tanque cuyo volumen es de 4000 litros está inicialmente lleno hasta la mitad de su capacidad, con una solución en la que hay disueltos 100 kilógramos de sal. Se bombea agua pura al tanque a razón de q litros/minuto y la mezcla, que se mantiene homogénea mediante agitación, se extrae a razón de 3 litros/minuto. Si se sabe que al cabo de 3 horas y 20 minutos hay 800 litros más de solución en el tanque, determine
$a)$ q
$b)$ la cantidad de sal en el tanque al cabo de 4 horas.

(20 puntos).

Solución:
Como se bombea agua pura al tanque inicialmente se tiene que $C_1 = 0\,kg/L$

$q_1 = q$

$q_2 = 3\,L/min \quad ; \quad V_0 = 2000\,L \;\; ; \; x_0 = x(0) = 100\,kg$

$V(t) = V_0 + (q - q_2)\,t$

Se sabe que al cabo de 3 horas y 20 minutos ($= 3 \cdot 60 + 20 = 200$ minutos) hay 800 litros más de solución en el tanque, es decir

$$V(200) = 2800 \Rightarrow 2000 + (q-3)\,200 = 2800 \Rightarrow 200q - 600 = 800 \Rightarrow$$

$$200q = 1400 \Rightarrow q = \frac{1400}{200} = 7\,L/min$$

$a)$ $q = 7\,L/min$

$b)$ Para obtener la cantidad de sal en el tanque debemos resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{2000+(7-3)\,t}\,x = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{3}{2000+4\,t}\,x = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{3}{2000+4\,t}\,x \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{3}{2000+4\,t}\,dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{3}{2000+4\,t}\,dt \Rightarrow ln(x) = -\frac{3}{4}\,ln(2000+4t)+k$$

Usemos la condición inicial $x(0)=100$ para calcular k

$$ln(100) = -\frac{3}{4}\,ln(2000+4(0))+k \Rightarrow ln(100) = -\frac{3}{4}\,ln(2000)+k \Rightarrow$$

$$k = ln(100) + \frac{3}{4}\,ln(2000) \approx 10.3$$

Calculemos ahora la cantidad de sal en el tanque al cabo de 4 horas $(=4\cdot 60 = 240$ minutos)

$$ln(x(t)) = -\frac{3}{4}\,ln(2000+4t) + ln(100) + \frac{3}{4}\,ln(2000) \Rightarrow$$

$$ln(x(240)) = -\frac{3}{4}\,ln(2000+4(240)) + ln(100) + \frac{3}{4}\,ln(2000) \Rightarrow$$

$$ln(x(240)) = -\frac{3}{4}\,ln(2960) + ln(100) + \frac{3}{4}\,ln(2000) \Rightarrow$$

$$ln(x(240)) \approx 4.31113862 \Rightarrow x(240) \approx 74.52529665\,kg \quad \square$$

2) Obtenga:
$a)$ la solución de $y' = \sqrt{x+2y} - 1$

$b)$ la solución particular que pasa por el punto $(1,-2)$ de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y+y^2}{2x^3+3xy}$

(20 puntos).

<u>Solución:</u>
$a)$ $y' = \sqrt{x+2y} - 1$

Sea $z = x+2y$

$$z = x+2y \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + 2\,\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dz}{dx}-1}{2}$$

$$y' = \sqrt{x+2y} - 1 \Rightarrow \frac{\frac{dz}{dx}-1}{2} = \sqrt{z} - 1 \Rightarrow \frac{dz}{dx} - 1 = 2\sqrt{z} - 2 \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx} = 2\sqrt{z} - 1 \Rightarrow \frac{dz}{2\sqrt{z}-1} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{2\sqrt{z}-1} = \int dx \Rightarrow \int \frac{dz}{2\sqrt{z}-1} = x$$

Resolvamos la integral $\int \frac{dz}{2\sqrt{z}-1}$

$P^2 = z \Rightarrow 2P\,dP = dz$

$P^2 = z \Rightarrow P = \sqrt{z}$

$$\int \frac{dz}{2\sqrt{z}-1} = \int \frac{2\,P\,dP}{2P-1}$$

$2P : 2P - 1 = 1$
$^{(-)}2P - {}^{(+)}1$
$---------$
1

$$\frac{2P}{2P-1} = 1 + \frac{1}{2P-1}$$

$$\int \frac{dz}{2\sqrt{z}-1} = \int \frac{2\,P\,dP}{2P-1} = \int dP + \int \frac{1}{2P-1} dP = P + \frac{1}{2} ln(2P-1) =$$

$$\sqrt{z} + \frac{1}{2} ln(2\sqrt{z}-1)$$

Luego, volviendo a la ecuación diferencial

$$\int \frac{dz}{2\sqrt{z}-1} = x \Rightarrow \sqrt{z} + \frac{1}{2} ln(2\sqrt{z}-1) = x + c \Rightarrow$$

$$\sqrt{x+2y} + \frac{1}{2} ln(2\sqrt{x+2y}-1) = x + c \quad \square$$

$b)\ \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y+y^2}{2x^3+3xy}$

Notemos que $M(x,y) = 3x^2y + y^2$ y $N(x,y) = 2x^3 + 3xy$

$M_y = 3x^2 + 2y$

$N_x = 6x^2 + 3y$

De lo anterior vemos que la EDO no es exacta.

$$\frac{1}{N}(M_y - N_x) = \frac{1}{2x^3+3xy}(3x^2 + 2y - 6x^2 - 3y) = \frac{-3x^2-y}{2x^3+3xy} = \frac{-3x^2-y}{x(2x^2+3y)}$$

$-\frac{1}{M}(M_y - N_x) = -\frac{1}{3x^2y+y^2}(3x^2+2y-6x^2-3y) = -\frac{-3x^2-y}{3x^2y+y^2} = \frac{3x^2+y}{y(3x^2+y)} =$

$\frac{(3x^2+y)}{y(3x^2+y)} = \frac{1}{y}$

Calculemos el factor integrante

$I(y) = e^{\int \frac{1}{y}\,dy} = e^{ln(y)} = y$

Así

$M(x,y) = 3x^2y^2 + y^3$

$N(x,y) = 2x^3y + 3xy^2$

$F_x = M(x,y) \Rightarrow F(x,y) = \int M(x,y)\,dx \Rightarrow F(x,y) = \int \left(3x^2y^2 + y^3\right)dx \Rightarrow$

$F(x,y) = x^3y^2 + y^3x + f(y)$

$F_y = N(x,y) \Rightarrow 2x^3y + 3y^2x + f'(y) = 2x^3y + 3xy^2 \Rightarrow f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = c_1$

$F(x,y) = x^3y^2 + y^3x + c_1$

La solución final es: $F(x,y) = c_2 \Rightarrow x^3y^2 + y^3x + c_1 = c_2 \Rightarrow x^3y^2 + y^3x = c$

Recordemos que la solución debe pasar por el punto $(1,-2)$, es decir

$x^3y^2 + y^3x = c \Rightarrow 1^3(-2)^2 + (-2)^3(1) = c \Rightarrow 4 - 8 = c \Rightarrow c = -4$

Finalmente la solución particular que pasa por el punto $(1,-2)$ de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y+y^2}{2x^3+3xy}$ es $x^3y^2 + y^3x = -4$ ❑

3) Resuelva:

$a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

$b)\ \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+5x+6}$

(20 puntos).

<u>Solución:</u>

$a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

Sea $z^6 = x$

$$z^6 = x \Rightarrow z = \sqrt[6]{x} = x^{1/6} \Rightarrow z^2 = x^{2/6} = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$

$$z^6 = x \Rightarrow z = \sqrt[6]{x} = x^{1/6} \Rightarrow z^3 = x^{3/6} = x^{1/2} = \sqrt{x}$$

$$z^6 = x \Rightarrow 6z^5\, dz = dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6z^5\, dz}{z^3+z^2} = 6\int \frac{z^5\, dz}{z^2(z+1)} = 6\int \frac{z^3\, dz}{z+1}$$

$$z^3 : z+1 = z^2 - z + 1$$
$$^{(-)}z^3 + {}^{(-)}z^2$$
$$-----------$$
$$-\,z^2$$
$$-\,^{(+)}z^2 - {}^{(+)}z$$
$$-----------$$
$$z$$
$$^{(-)}z + {}^{(-)}1$$
$$----------$$
$$-\,1$$

$$\frac{z^3}{z+1} = z^2 - z + 1 - \frac{1}{z+1}$$

$$\int \frac{z^3}{z+1} dz = \int z^2\, dz - \int z\, dz + \int dz - \int \frac{1}{z+1} dz = \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z - ln(z+1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{z^3}{z+1} dz = 2z^3 - 3z^2 + 6z - 6\,ln(z+1) + c =$$

$$2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\,ln(\sqrt[6]{x}+1) + c$$

Finalmente

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\,ln(\sqrt[6]{x}+1) + c \quad \square$$

$b)$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+5x+6}$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+5x+6} = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{dx}{x^2+5x+6}$$

Calculemos $\int_0^{b} \frac{dx}{x^2+5x+6}$

$$\int \frac{dx}{x^2+5x+6} = \int \frac{dx}{(x+3)(x+2)}$$

$$\frac{1}{(x+3)(x+2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow 1 = A(x+2) + B(x+3)$$

$$x = -2: \ B = 1$$

$$x = -3: \ -A = 1 \Rightarrow A = -1$$

$$\frac{1}{(x+3)(x+2)} = -\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+5x+6} = \int \frac{dx}{(x+3)(x+2)} = -\int \frac{1}{x+3}\,dx + \int \frac{1}{x+2}\,dx = -ln(x+3) + ln(x+2)$$

$$\int_0^b \frac{dx}{x^2+5x+6} = \Big[-ln(x+3) + ln(x+2) \Big]_0^b =$$

$$-ln(b+3) + ln(b+2) + ln(3) - ln(2)$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+5x+6} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+5x+6} =$$

$$\lim_{b\to\infty} \Big[-ln(b+3) + ln(b+2) + ln(3) - ln(2) \Big] = 0 + ln(3) - ln(2) =$$

$$ln(3) - ln(2)$$

Finalmente $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+5x+6} = ln(3) - ln(2)$ ❑