UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 1 CÁLCULO INTEGRAL + EDO

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____ CARRERA :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 30 MINUTOS FECHA : Ma 09/10/18

1) Resuelva la integral $\int \frac{1-sen(t)}{cos(t)}\, dt$

(20 puntos).

Solución:

$$\int \frac{1-sen(t)}{cos(t)}\, dt = \int \frac{1}{cos(t)}\, dt - \int \frac{sen(t)}{cos(t)}\, dt = \int sec(t)\, dt - \int \frac{sen(t)}{cos(t)}\, dt$$

$$= ln|\, sec(t) + tg(t)\,| - \int \frac{sen(t)}{cos(t)}\, dt$$

Para calcular la ntergral $\int \frac{sen(t)}{cos(t)}$ consideremos la sustitución $F = cos(t)$

$F = cos(t) \Rightarrow dF = -\, sen(t)\, dt \Rightarrow sen(t)\, dt = -\, dF$

$\int \frac{sen(t)}{cos(t)}\, dt = -\int \frac{1}{F}\, dF = -\, ln|\, F\,| = -\, ln|\, cos(t)\,|$

Finalmente, $\int \frac{1-sen(t)}{cos(t)}\, dt = ln|\, sec(t) + tg(t)\,| + ln|\, cos(t)\,| + c$, con c una constante real cualquiera. ❑

2) Muestre que: $\int_1^3 \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\, dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{16\sqrt{3}}{27}$

(20 puntos).

Solución:

Resolvamos la integral indefinida $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\, dx$

Consideremos la sustición $P = 1 + \frac{1}{x}$

$P = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow dP = -\frac{1}{x^2}\, dx \Rightarrow \frac{1}{x^2}\, dx = -\, dP$

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\, dx = -\int \sqrt{P}\, dP = -\int P^{1/2}\, dP = -\frac{2}{3}P^{3/2}$$

$$= -\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3/2}$$

Luego

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx \;=\; -\,\frac{2}{3}\,\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3/2}\Big|_1^3 = \;-\,\frac{2}{3}\,\left(1+\frac{1}{3}\right)^{3/2} + \frac{2}{3}\,\left(1+\frac{1}{1}\right)^{3/2}$$
$$= \;-\,\frac{2}{3}\,\left(\frac{4}{3}\right)^{3/2} + \frac{2}{3}\,\left(2\right)^{3/2} = \frac{2}{3}\,\sqrt{2^3} - \frac{2}{3}\,\left(\frac{2^2}{3}\right)^{3/2} = \frac{2}{3}\,\sqrt{2^2\,2} - \frac{2}{3}\,\frac{(2^2)^{3/2}}{\sqrt{3^3}}$$
$$= \frac{2}{3}\,2\sqrt{2} - \frac{2}{3}\,\frac{2^3}{\sqrt{3^2\,3}} = \frac{4}{3}\,\sqrt{2} - \frac{16}{9}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\,\sqrt{2} - \frac{16}{9}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{4}{3}\,\sqrt{2} - \frac{16}{9}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3}\,\sqrt{2} - \frac{16}{27}\,\sqrt{3}\; = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{16\sqrt{3}}{27}\;\square$$

3) Resuelva la ecuación : $\frac{d^2y}{dx^2} + cos(x) = x\,e^{-x} + 5\,x^3\,\sqrt{x}$, $x > 0$

(20 puntos).

Solución:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + cos(x) = x\,e^{-x} + 5\,x^3\,\sqrt{x} \;\Rightarrow\; \frac{d^2y}{dx^2} = x\,e^{-x} + 5\,x^3\,\sqrt{x}\; - cos(x) \Rightarrow$$
$$\int \frac{d^2y}{dx^2}\,dx = \int x\,e^{-x}dx + \int 5\,x^3\,\sqrt{x}\,dx - \int cos(x)\,dx \Rightarrow$$
$$\frac{dy}{dx}\; = \int x\,e^{-x}dx + \int 5\,x^3\,\sqrt{x}\,dx - \int cos(x)\,dx$$

La integral $\int x\,e^{-x}dx$ la resolveremos por partes

Sean $p\,' = e^{-x}$ y $q = x$. Luego $p = \;-\,e^{-x}$ y $q\,' = 1$

$$\int x\,e^{-x}dx \;=\; -\,x\,e^{-x} + \int e^{-x}dx = \;-\,x\,e^{-x}\; - e^{-x}$$

Consideremos la integral $\int 5\,x^3\,\sqrt{x}\,dx$

$$\int 5\,x^3\,\sqrt{x}\,dx = 5\int x^3\,x^{1/2}\,dx = 5\int x^{7/2}\,dx = 5\,\frac{2}{9}\,x^{9/2} = \frac{10}{9}\,x^{9/2}$$

Tenemos que $\int cos(x)\,dx = sen(x)$

Reemplazando los resultados antreriores se tiene:

$$\frac{dy}{dx}\; = \int x\,e^{-x}dx + \int 5\,x^3\,\sqrt{x}\,dx - \int cos(x)\,dx =$$
$$-\,x\,e^{-x}\; - e^{-x} + \frac{10}{9}\,x^{9/2} - sen(x) + c$$

Integrando la ecuación anterior:

$$\int \frac{dy}{dx}\,dx = \;-\int x\,e^{-x}dx\; - \int e^{-x}dx + \frac{10}{9}\int x^{9/2}dx - \int sen(x)\,dx + \int c\,dx$$
$$\Rightarrow y(x) = x\,e^{-x}\; + e^{-x} + e^{-x} + \frac{10}{9}\,\frac{2}{11}x^{11/2} + cos(x) + cx + d$$

$\Rightarrow y(x) = x\,e^{-x}\; + 2e^{-x} + \frac{20}{99}\,x^{11/2} + cos(x) + cx + d$, con c y d constantes reales. $\square$