UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 1 CÁLCULO INTEGRAL + EDO

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :_____ PTOS. :_____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Ju 03/09/15

1) Obtenga el área encerrada por la curva $y = 3 - 2x^2$ y el eje horizontal. **(15 puntos).**

Solución:

La parábola $y = 3 - 2x^2$ la podemos escribir como

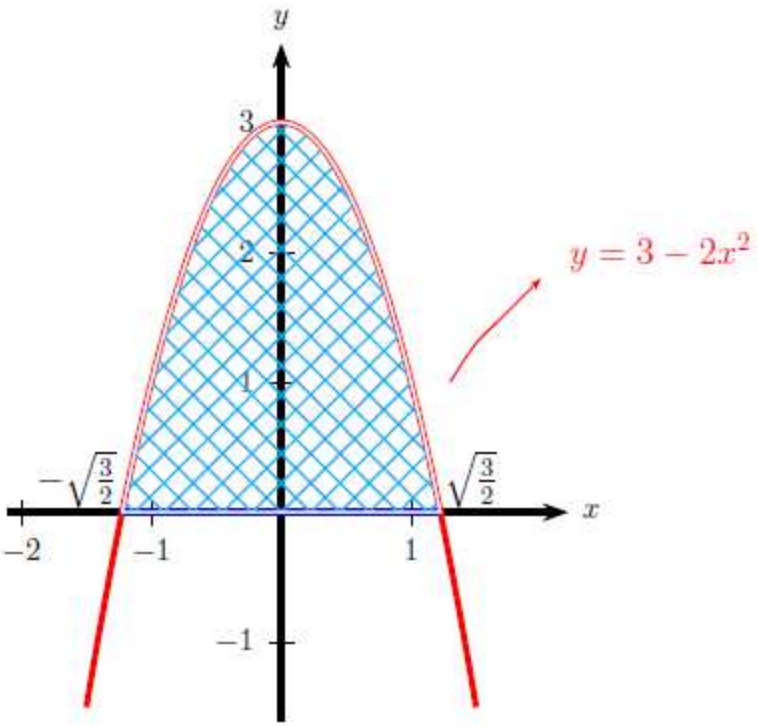
$$y - 3 = -2x^2$$

De lo anterior notamos que el vértice es el punto $(0, 3)$ y la parábola tiene como eje de simetría el eje vertical y además por el signo negativo apunta hacia abajo.

Ahora, obtengamos los puntos de intersección de la parábola con el eje horizontal, para ello hacemos $y = 0,$ es decir,

$$0 = 3 - 2x^2 \Rightarrow 2x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1.22$$

Gráficamente se tiene que el área A buscada está dada por la región achurada, como se muestra a continuación



Luego

$$A = \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (3 - 2x^2)\, dx = 3\int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} dx - \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} 2x^2\, dx = 3x\Big|_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{3}x^3\Big|_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$= 3\left[\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)\right] - \tfrac{2}{3}\left[\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^3 - \left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^3\right]$$

$$= 3\left[\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right] - \tfrac{2}{3}\left[\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^3 + \left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^3\right]$$

$$= 6\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \tfrac{4}{3}\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^3 = 6\sqrt{\tfrac{3}{2}} - 2\sqrt{\tfrac{3}{2}} = 4\sqrt{\tfrac{3}{2}} = 2\sqrt{6} \approx 4.9 \ \square$$

2) Resuelva el P.V.I. siguiente: $y'' - t = sen(2t) + e^{4t}\,,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ **(15 puntos).**

Solución:

$y'' - t = sen(2t) + e^{4t} \Rightarrow y'' = sen(2t) + e^{4t} + t$

$$\Rightarrow \int y'' \, dt = \int sen(2t) \, dt + \int e^{4t} \, dt + \int t \, dt$$

$$\Rightarrow y'(t) = -\frac{1}{2} cos(2t) + \frac{1}{4} e^{4t} + \frac{1}{2} t^2 + c_1$$

Como $y'(0) = 1$, se tiene

$$y'(0) = -\frac{1}{2} cos(2 \cdot 0) + \frac{1}{4} e^{4 \cdot 0} + \frac{1}{2} (0)^2 + c_1 \Rightarrow 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + c_1 \Rightarrow c_1 = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{5}{4}$$

Luego

$$y'(t) = -\frac{1}{2} cos(2t) + \frac{1}{4} e^{4t} + \frac{1}{2} t^2 + \frac{5}{4}$$

Ahora, integrando nuevamente con respecto a t

$$y'(t) = -\frac{1}{2} cos(2t) + \frac{1}{4} e^{4t} + \frac{1}{2} t^2 + \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \int y'(t) \, dt = -\frac{1}{2} \int cos(2t) \, dt + \frac{1}{4} \int e^{4t} dt + \frac{1}{2} \int t^2 \, dt + \int \frac{5}{4} \, dt$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{4} sen(2t) + \frac{1}{16} e^{4t} + \frac{1}{6} t^3 + \frac{5}{4} t + c_2$$

Como $y(0) = 0$, se tiene que

$$y(0) = -\frac{1}{4} sen(2 \cdot 0) + \frac{1}{16} e^{4 \cdot 0} + \frac{1}{6} (0)^3 + \frac{5}{4} (0) + c_2 \Rightarrow 0 = \frac{1}{16} + c_2$$

$$\Rightarrow c_2 = -\frac{1}{16}$$

Finalmente, la solución del P.V.I. dado es

$$y(t) = -\frac{1}{4} sen(2t) + \frac{1}{16} e^{4t} + \frac{1}{6} t^3 + \frac{5}{4} t - \frac{1}{16} \quad \blacksquare$$

3) Si $f(t) = sec(t) \, tg(t) \sqrt{1 + sec(t)}$, entonces calcule $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) \, dt$

(15 puntos).

Solución:

Para calcular la integral $\int sec(t) \, tg(t) \sqrt{1 + sec(t)} \, dt$ consideremos la sustitución $M = 1 + sec(t)$

$M = 1 + sec(t) \Rightarrow dM = sec(t)\, tg(t)\, dt$

Luego

$$\int sec(t)\, tg(t)\, \sqrt{1 + sec(t)}\, dt = \int \sqrt{M}\, dM = \int M^{1/2}\, dM = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}\, M^{1+1/2}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}}\, M^{3/2} = \frac{2}{3} M^{3/2} = \frac{2}{3}\, (1 + sec(t))^{3/2}$$

Así

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sec(t)\, tg(t)\, \sqrt{1 + sec(t)}\, dt = \frac{2}{3}\, (1 + sec(t))^{3/2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{2}{3}\, (1 + sec(\tfrac{\pi}{4}))^{3/2} - \frac{2}{3}\, (1 + sec(0))^{3/2} = \frac{2}{3}\, (1 + \frac{1}{cos(\frac{\pi}{4})})^{3/2} - \frac{2}{3}\, (1 + \frac{1}{cos(0)})^{3/2}$$

$$= \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{3/2} - \frac{2}{3}\, (1 + \tfrac{1}{1})^{3/2} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{3/2} - \frac{2}{3}\, 2^{3/2}$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^{3/2} - \frac{2}{3}\, 2^{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^3} - \frac{2}{3}\, \sqrt{2^3}$$

Finalmente

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec(t)\, tg(t)\, \sqrt{1 + sec(t)}\, dt = \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^3} - \frac{2}{3}\, \sqrt{2^3}\ \square$$

4) Muestre que : $\int_0^1 (1 + \sqrt{x})^8\, dx = \frac{4097}{45}$ **(15 puntos).**

Solución:

Consideremos el cambio de variable $v = 1 + \sqrt{x}$

$v = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = v - 1$

$v = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow dv = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \Rightarrow dv = \frac{1}{2\,(v-1)}\, dx \Rightarrow dx = 2(v-1)\, dv$

$$\int (1 + \sqrt{x})^8\, dx = 2 \int (v-1)\, v^8\, dv = 2 \int (v^9 - v^8)\, dv$$

$= 2\int v^9\,dv - 2\int v^8\,dv = \frac{2}{10}\,v^{10} - \frac{2}{9}\,v^9 + c = \frac{1}{5}\,(1+\sqrt{x}\,)^{10} - \frac{2}{9}\,(1+\sqrt{x}\,)^9 + c$

Así, $\int_0^1 (1+\sqrt{x}\,)^8\,dx = \left[\frac{1}{5}\,(1+\sqrt{x}\,)^{10} - \frac{2}{9}\,(1+\sqrt{x}\,)^9\right]_0^1$

$= \frac{1}{5}\,(1+1\,)^{10} - \frac{2}{9}\,(1+1\,)^9 - \frac{1}{5} + \frac{2}{9} = \frac{1}{5}\,2^{10} - \frac{2}{9}\,2^9 - \frac{1}{5} + \frac{2}{9}$

$= \frac{1024}{5} - \frac{1024}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{9} = \frac{4097}{45}$

Finalmente, $\int_0^1 (1+\sqrt{x}\,)^8\,dx = \frac{4097}{45}$ ❑