UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 1 CÁLCULO INTEGRAL + EDO

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Mi 23/10/13

1) Obtenga $\int \left[\ cos(x) + sen(x)\right]^2 \ dx$

(10 puntos).

Solución:

Método 1:

Tenemos que:

$$\left[\ cos(x) + sen(x)\right]^2 = cos^2(x) + 2\,sen(x)\,cos(x) + sen^2(x) =$$

$$\left[sen^2(x) + cos^2(x)\right] + 2\,sen(x)\,cos(x) = 1 + sen(2x)$$

Luego

$$\int \left[\ cos(x) + sen(x)\right]^2 \ dx = \int \left[\ 1 + sen(2x)\right] \ dx = \int dx + \int \ sen(2x) \ dx =$$

$$x - \frac{1}{2}\,cos(2x) + c$$

Finalmente

$$\int \left[\ cos(x) + sen(x)\right]^2 \ dx = x - \frac{1}{2}\,cos(2x) + c_1$$

donde c_1 es una constante real cualquiera.

Método 2:

Tenemos que:

$$\left[\ cos(x) + sen(x)\right]^2 = 1 + 2\,sen(x)\,cos(x)$$

Luego

$$\int \left[\ cos(x) + sen(x)\right]^2 \ dx = \int \left[\ 1 + 2\,sen(x)\,cos(x)\right] dx =$$

$$\int dx + \int 2\,sen(x)\,cos(x)\ dx = x + 2\int\ sen(x)\,cos(x)\ dx$$

Ahora para resolver la integral $\int\ sen(x)\,cos(x)\ dx$ consideremos la sustitución $P = sen(x)$

$$P = sen(x) \Rightarrow dP = cos(x)\,dx$$

$$2\int\ sen(x)\,cos(x)\ dx = 2\int\ P\,dP = 2\tfrac{1}{2}\,P^2 =\ sen^2(x)$$

Finalmente

$$\int\ \Big[\ cos(x) + sen(x)\Big]^2\ dx = x +\ sen^2(x) + c_2$$

donde c_2 es una constante real cualquiera.

Método 3:
Tenemos que:
$\Big[\ cos(x) + sen(x)\Big]^2 = 1 + 2\,sen(x)\,cos(x)$

Luego
$\int\ \Big[\ cos(x) + sen(x)\Big]^2\ dx = \int\ \Big[\ 1 + 2\,sen(x)\,cos(x)\Big]\,dx =$

$$\int dx + \int 2\,sen(x)\,cos(x)\ dx = x + 2\int\ sen(x)\,cos(x)\ dx$$

Ahora para resolver la integral $\int\ sen(x)\,cos(x)\ dx$ consideremos la sustitución $P = cos(x)$

$$P = cos(x) \Rightarrow dP =\ -\ sen(x)\,dx$$

$$2\int\ sen(x)\,cos(x)\ dx =\ -\ 2\int\ P\,dP =\ -\ 2\tfrac{1}{2}\,P^2 =\ -\ cos^2(x)$$

Finalmente

$$\int\ \Big[\ cos(x) + sen(x)\Big]^2\ dx = x - cos^2(x) + c_3$$

donde c_3 es una constante real cualquiera.

Notemos que los resultados anteriores son equivalentes, como se muestra a continuación

$x - \frac{1}{2}\,cos(2x) + c_1 = x - \frac{1}{2}\left[\ cos^2(x) - sen^2(x)\right] + c_1 =$

$x - \frac{1}{2}\left[\ 1 - sen^2(x) - sen^2(x)\right] + c_1 = x - \frac{1}{2}\left[\ 1 - 2sen^2(x)\right] + c_1 =$

$x - \frac{1}{2}\ + sen^2(x) + c_1 = x + sen^2(x) + c$, con $c = c_1 - \frac{1}{2}$

Por otro lado

$x - cos^2(x) + c_3 = x - \left[\ 1 - sen^2(x)\right] + c_3 = x - 1 + sen^2(x) + c_3 =$

$x + sen^2(x) + c,$ con $c = c_3 - 1$

Finalmente

$x + sen^2(x) + c_2 = x + sen^2(x) + c,$ con $c = c_2$ ❐

2) Resuelva el P.V.I. siguiente: $y\,' - 3\,x\,cos(x^2) = 2\,,\ y(\pi) = 0$

(10 puntos).

Solución:

$y\,' - 3\,x\,cos(x^2) = 2 \Rightarrow y\,' = 3\,x\,cos(x^2) + 2 \Rightarrow$

$\int y\,'\,dx = \int 3\,x\,cos(x^2)\,dx + \int 2\,dx \Rightarrow y(x) = 3\int x\,cos(x^2)\,dx + 2x$

Obtengamos el resultado de la integral $\int x\,cos(x^2)\,dx$ usando la sustitución simple $V = x^2$

$V = x^2 \Rightarrow dV = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}\,dV$

$\int x\,cos(x^2)\,dx = \int\ cos(x^2)\ x\,dx = \frac{1}{2}\int\ cos(V)\ dV = \frac{1}{2}sen(V) = \frac{1}{2}sen(x^2)$

Volvamos al desarrollo inicial

$y(x) = 3\int x\,cos(x^2)\,dx + 2x = \frac{3}{2}sen(x^2) + 2x + c$

Tenemos que $y(x) = \frac{3}{2} sen(x^2) + 2x + c$

Para obtener la constante c podemos usar la condición inicial $y(\pi) = 0$

$$y(\pi) = \frac{3}{2} sen(\pi^2) + 2\pi + c = 0 \Rightarrow c = -2\pi - \frac{3}{2} sen(\pi^2)$$

Finalmente la solución del P.V.I. $y' - 3\,x\,cos(x^2) = 2\,,\ y(\pi) = 0$ es

$$y(x) = \frac{3}{2} sen(x^2) + 2x - 2\pi - \frac{3}{2} sen(\pi^2) \quad \square$$

3) Calcule $\int_{-2}^{0} \frac{t-1}{3t^2-6t+1}\, dt$

(10 puntos).

Solución:

Obtengamos la integral indefinida $\int \frac{t-1}{3t^2-6t+1}\, dt$ primero y al final evaluamos.

Consideremos la sustitución simple $w = 3t^2 - 6t + 1$

$$w = 3t^2 - 6t + 1 \Rightarrow dw = (6t-6)\, dt \Rightarrow dw = 6\,(t-1)\, dt \Rightarrow \frac{1}{6}\, dw = (t-1)\, dt$$

Luego

$$\int \frac{t-1}{3t^2-6t+1}\, dt = \frac{1}{6}\int \frac{dw}{w} = \frac{1}{6}\, ln(w) = \frac{1}{6}\, ln(3t^2 - 6t + 1)$$

De lo anterior se tiene que:

$$\int_{-2}^{0} \frac{t-1}{3t^2-6t+1}\, dt = \frac{1}{6}\, ln(3t^2 - 6t + 1)\Big|_{-2}^{0} = \frac{1}{6}\, ln(1) - \frac{1}{6}\, ln(25) = -\frac{1}{6}\, ln(25) =$$

$$-\frac{1}{6}\, ln(5^2) = -\frac{2}{6}\, ln(5) = -\frac{1}{3}\, ln(5)$$

Finalmente

$$\int_{-2}^{0} \frac{t-1}{3t^2-6t+1}\, dt = -\frac{1}{3}\, ln(5) \quad \square$$

4) Obtenga $\int \frac{\sqrt{9x^2-4}}{x}\, dx$

(15 puntos).

Solución:

Notemos que: $9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2$

Luego considerando la sustitución trigonométrica $3x = 2\,sec(\alpha)$ se tiene que:

$$3\,dx = 2\,sec(\alpha)\,tg(\alpha)\;d\alpha \Rightarrow dx = \frac{2}{3}\,sec(\alpha)\,tg(\alpha)\;d\alpha$$

$$\sqrt{9x^2-4} = \sqrt{(3x)^2-4} = \sqrt{4\,sec^2(\alpha)-4} = \sqrt{4(sec^2(\alpha)-1)} =$$

$$2\sqrt{sec^2(\alpha)-1} = 2\,tg(\alpha)$$

$$x = \frac{2}{3}\,sec(\alpha)$$

Reemplazando lo anterior en la integral $\int \frac{\sqrt{9x^2-4}}{x}\, dx$ se tiene que:

$$\int \frac{\sqrt{9x^2-4}}{x}\, dx = \int \frac{2\,tg(\alpha)}{\frac{2}{3}\,sec(\alpha)}\;\frac{2}{3}\,sec(\alpha)\,tg(\alpha)\;d\alpha = 2\int tg^2(\alpha)\;d\alpha =$$

$$2\int \left[\,sec^2(\alpha)-1\right]\,d\alpha = 2\int sec^2(\alpha)\;d\alpha - 2\int d\alpha = 2\,tg(\alpha) - 2\alpha + c$$

Antes de volver a la variable original recordemos que

$$tg(\alpha) = \sqrt{sec^2(\alpha)-1} = \sqrt{(\tfrac{3}{2}x)^2-1} = \sqrt{\tfrac{9x^2}{4}-1} = \sqrt{\tfrac{9x^2-4}{4}} = \frac{\sqrt{9x^2-4}}{2}$$

$$\alpha = Arcsec(\tfrac{3}{2}x)$$

Reemplazando se tiene que:

$$\int \frac{\sqrt{9x^2-4}}{x}\, dx = 2\,tg(\alpha) - 2\alpha + c = \sqrt{9x^2-4} - 2\,Arcsec(\tfrac{3}{2}x) + c$$

Finalmente

$$\int \frac{\sqrt{9x^2-4}}{x}\, dx = \sqrt{9x^2-4} - 2\,Arcsec(\tfrac{3}{2}x) + c \quad \square$$

5) Determine el resultado de la integral $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}\, dx$

(15 puntos).

Solución:

Consideremos la sustición $z = e^x$

$$z = e^x \Rightarrow dz = e^x\, dx \Rightarrow dx = \frac{dz}{e^x} \Rightarrow dx = \frac{dz}{z}$$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}\, dx = \int \frac{(e^x)^3}{(e^x)^2-1}\, dx = \int \frac{z^3}{z^2-1}\, \frac{dz}{z} = \int \frac{z^2}{z^2-1}\, dz$$

Para resolver la integral $\int \frac{z^2}{z^2-1}\, dz$ debemos dividir primero

$$\begin{array}{l} z^2 : z^2 - 1 = 1 \\ {}^{(-)}z^2 - {}^{(+)}1 \\ \hline \qquad 1 \end{array}$$

Luego

$$\frac{z^2}{z^2-1} = 1 + \frac{1}{z^2-1}$$

De lo anterior, se tiene que:

$$\int \frac{z^2}{z^2-1} dz = \int dz + \int \frac{1}{z^2-1} dz = z + \int \frac{1}{z^2-1} dz$$

Resolvamos la integral $\int \frac{1}{z^2-1} dz$ usando fracciones parciales

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} \Rightarrow A(z+1) + B(z-1) = 1$$

$$z = -1 : \quad -2B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$z = 1 : \quad 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Tenemos que:

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} \Rightarrow \int \frac{1}{z^2-1} dz = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z-1} dz - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z+1} dz \Rightarrow$$

$\int \frac{1}{z^2-1} dz = \frac{1}{2}\, ln(z-1) - \frac{1}{2}\, ln(z+1)$

Luego

$\int \ \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}\ dx = \int \frac{z^2}{z^2-1} dz = z + \frac{1}{2}\, ln(z-1) - \frac{1}{2}\, ln(z+1) + c =$

$e^x + \frac{1}{2}\, ln(e^x-1) - \frac{1}{2}\, ln(e^x+1) + c$

Finalmente

$\int \ \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}\ dx = e^x + \frac{1}{2}\, ln(e^x-1) - \frac{1}{2}\, ln(e^x+1) + c$

donde c es una constante real cualquiera ❑