UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 1 CÁLCULO INTEGRAL + EDO

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL – INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Ju 10/04/14

1) Obtenga la posición en el instante t de un objeto que se mueve en línea recta con aceleración constante a, velocidad inicial v_0 y desplazamiento inicial d_0

(10 puntos).

<u>Solución:</u>
Sabemos que : $v'(t) = a(t)$ y $d'(t) = v(t)$.
Como la aceleración es constante e igual a a, se tiene que :

$$v'(t) = a(t) \Rightarrow v'(t) = a \Rightarrow v(t) = \int v'(t)\,dt = \int a\,dt = at + c_1$$

Por lo tanto, $v(t) = at + c_1$

De acuerdo al enunciado la velocidad inicial es conocida e igual a v_0, es decir,
$v(0) = v_0$
$v(0) = v_0 \Rightarrow a(0) + c_1 = v_0 \Rightarrow c_1 = v_0$

La velocidad finalmente es : $v(t) = a\,t + v_0$

Para obtener la posición en el instante t debemos integrar la velocidad pues $d'(t) = v(t)$.
$$d'(t) = v(t) \Rightarrow \; d(t) = \int d'(t)\,dt = \int v(t)\,dt = \int (at + v_0)\,dt = a\frac{t^2}{2} + v_0\,t + c_2$$

Ahora es necesario notar que el desplazamiento inicial es d_0 , luego :
$$d(0) = d_0 \Rightarrow a\frac{(0)^2}{2} + v_0\,(0) + c_2 = d_0 \Rightarrow c_2 = d_0$$

Finalmente, la función posición en el instante t está dada por :
$$d(t) = a\frac{t^2}{2} + v_0\,t + d_0 \quad \square$$

2) Resuelva el P.V.I. siguiente: $y'' - \frac{1}{t} = 2^t + e^t$, $y(4) = 0$

(15 puntos).

<u>**Solución:**</u>

Notemos que la segunda condición inicial, pues la ecuación diferencial es de segundo orden, es $y'(4) = k$, con k una constante real conocida.

$$y'' - \frac{1}{t} = 2^t + e^t \Rightarrow y'' = 2^t + e^t + \frac{1}{t} \Rightarrow \int y''dt = \int 2^t\, dt + \int e^t\, dt + \int \frac{1}{t} dt \Rightarrow$$

$$y'(t) = \frac{1}{ln(2)} 2^t + e^t + ln(t) + c_1$$

Ahora usando la condición inicial $y'(4) = k$ se tiene que:

$$y'(4) = k \Rightarrow y'(4) = \frac{1}{ln(2)} 2^4 + e^4 + ln(4) + c_1 = k \Rightarrow$$

$$c_1 = k - \frac{1}{ln(2)} 2^4 - e^4 - ln(4) \Rightarrow c_1 = k - \frac{16}{ln(2)} - e^4 - ln(4)$$

Luego

$$y'(t) = \frac{1}{ln(2)} 2^t + e^t + ln(t) + k - \frac{16}{ln(2)} - e^4 - ln(4)$$

Integrando la expresión anterior

$$\int y'(t)\, dt = \frac{1}{ln(2)} \int 2^t\, dt + \int e^t\, dt + \int ln(t)\, dt +$$

$$\int k\, dt - \int \frac{16}{ln(2)}\, dt - \int e^4\, dt - \int ln(4)\, dt \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{1}{[ln(2)]^2} 2^t + e^t + t\, ln(t) - t + kt - \frac{16}{ln(2)} t - e^4\, t - ln(4)\, t + c_2$$

Usando la condición inicial $y(4) = 0$ se tiene que:

$$y(4) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{[ln(2)]^2} 2^4 + e^4 + 4\, ln(4) - 4 + 4k - \frac{16}{ln(2)} 4 - 4e^4 - 4\, ln(4) + c_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{16}{[ln(2)]^2} - 4 + 4k - \frac{64}{ln(2)} - 3e^4 + c_2 = 0 \Rightarrow$$

$c_2 = \frac{64}{ln(2)} + 4 + 3e^4 - 4k - \frac{16}{\left[ln(2)\right]^2}$

Finalmente la solución del PVI $\quad y'' - \frac{1}{t} = 2^t + e^t \,,\; y(4) = 0 \quad$ es

$$y(t) = \frac{1}{\left[ln(2)\right]^2} 2^t + e^t + t\,ln(t) - t + kt - \frac{16}{ln(2)} t - e^4 t - ln(4)\,t + \frac{64}{ln(2)} + 4 + 3e^4 - 4k - \frac{16}{\left[ln(2)\right]^2} \quad \square$$

3) Si $f(t) = \begin{cases} -t^{-1} & , t < -1 \\ e^{t+1} & , t \geq -1 \end{cases}$, entonces calcule $\int_{-2}^{1} f(t)\,dt$

(10 puntos).

<u>Solución:</u>

$$\int_{-2}^{1} f(t)\,dt = \int_{-2}^{-1} f(t)\,dt + \int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \int_{-2}^{-1} -t^{-1}\,dt + \int_{-1}^{1} e^{t+1} dt =$$

$$-\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t}\,dt + e\int_{-1}^{1} e^t dt = -ln(t)\,\Big|_{-2}^{-1} + e\,e^t\,\Big|_{-1}^{1} =$$

$$-ln|-1| + ln|-2| + e^2 - e\,e^{-1} = ln(2) - ln(1) + e^2 - 1 = ln(2) + e^2 - 1$$

Finalmente:

$$\int_{-2}^{1} f(t)\,dt = ln(2) + e^2 - 1 \quad \text{con} \quad f(t) = \begin{cases} -t^{-1} & , t < -1 \\ e^{t+1} & , t \geq -1 \end{cases} \quad \square$$

4) Muestre que : $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = ln(\sqrt{2} + 1)$

(15 puntos).

<u>Solución:</u>

$$x = 3\,tg(\alpha) \Rightarrow x^2 = 9\,tg^2(\alpha) \Rightarrow x^2 + 9 = 9\left[tg^2(\alpha) + 1\right] = 9\,sec^2(\alpha)$$

$$x = 3\,tg(\alpha) \Rightarrow dx = 3\,sec^2(\alpha)\,d\alpha$$

$$x = 3\,tg(\alpha) \Rightarrow \alpha = Arctg(\tfrac{x}{3})$$

$$x = 0 \Rightarrow \alpha = Arctg(0) \Rightarrow \alpha = 0$$

$$x = 3 \Rightarrow \alpha = Arctg(\tfrac{3}{3}) \Rightarrow \alpha = Arctg(1) \Rightarrow \alpha = \tfrac{\pi}{4}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \int \frac{3\,sec^2(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{9\,sec^2(\alpha)}} = \int \frac{3\,sec^2(\alpha)\,d\alpha}{3\,sec(\alpha)} =$$

$$\int sec(\alpha)\,d\alpha = ln\Big(sec(\alpha)+tg(\alpha)\Big)$$

$$ln\Big(sec(\alpha)+tg(\alpha)\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = ln\Big(sec(\tfrac{\pi}{4})+tg(\tfrac{\pi}{4})\Big) - ln\Big(sec(0)+tg(0)\Big) =$$

$$ln(\sqrt{2}\,+1) - ln(1+0) = ln(\sqrt{2}\,+1) - ln(0) = \; ln(\sqrt{2}\,+1)$$

Finalmente : $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = ln(\sqrt{2}+1)$ ❑

5) Obtenga el valor exacto de $\int_3^6 x\sqrt{\frac{x}{3}-1}\,dx$

(10 puntos).

<u>**Solución:**</u>

Para calcular el valor exacto de $\int_3^6 x\sqrt{\frac{x}{3}-1}\,dx$ usaremos la sustitución $u=\frac{x}{3}-1$

$u=\frac{x}{3}-1 \Rightarrow du=\frac{dx}{3} \Rightarrow dx = 3\;du$ y además $x=3(u+1)$

Obtengamos los nuevos límites de integración.

Si $x=3$, entonces $u=\frac{3}{3}-1=0$

Si $x=6$, entonces $u=\frac{6}{3}-1=1$

Así,

$$\int_3^6 x\sqrt{\frac{x}{3}-1}\,dx = \int_0^1 3(u+1)\sqrt{u}\;\,3\,du = \int_0^1 3(u+1)u^{\frac{1}{2}}\;3\,du =$$

$$9\int_0^1 (u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})\,du = 9\Big[\tfrac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big]\Big|_0^1 = \frac{18}{5}+6 = \frac{48}{5}$$

Finalmente el valor exacto de $\int_3^6 x\sqrt{\frac{x}{3}-1}\,dx$ es $\frac{48}{5}$ ❑