EJERCICIOS RESUELTOS DE CALCULO INTEGRAL
SEGUNDO SEMESTRE DE 2009

1) Calcule $\int \frac{x\,e^{2x}}{(2x+1)^2}\,dx$

Solución:

Sean $dq = \frac{x}{(2x+1)^2}\,dx\,,\ p = e^{2x}$. Luego

$$q = \int \frac{x}{(2x+1)^2}\,dx \text{ y } dp = 2\,e^{2x}\,dx$$

$$\int \frac{x\,e^{2x}}{(2x+1)^2}\,dx = p\,q - \int 2\,q\ e^{2x}\,dx$$

Calculemos q :

$P = 2x + 1 \Rightarrow dP = 2\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dP$

$$x = \frac{1}{2}(P-1)$$

$$q = \int \frac{x}{(2x+1)^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(P-1)}{P^2}\,\frac{1}{2}dP = \frac{1}{4}\int \left(P^{-1} - P^{-2}\right)dP =$$

$$\frac{1}{4}\int P^{-1}dP - \frac{1}{4}\int P^{-2}dP = \frac{1}{4}ln(P) + \frac{1}{4}P^{-1} = \frac{1}{4}ln((2x+1)) + \frac{1}{4(2x+1)}$$

Por lo tanto :

$$\int 2\,q\ e^{2x}\,dx = \int 2\left[\frac{1}{4}ln((2x+1)) + \frac{1}{4(2x+1)}\right]\ e^{2x}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int ln((2x+1))e^{2x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x+1)}\ e^{2x}\,dx =$$

$$\frac{1}{4}e^{2x}ln(2x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x+1)}\ e^{2x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x+1)}\ e^{2x}\,dx = \frac{1}{4}e^{2x}ln(2x+1)$$

Pues, para calcular $\int ln(|2x+1|)e^{2x}\,dx$ consideramos

$p' = e^{2x} \Rightarrow p = \frac{1}{2}e^{2x}$

$q = ln(2x+1) \Rightarrow q' = \frac{2}{2x+1}$

$$\frac{1}{2}\int ln(|2x+1|)e^{2x}\,dx\ = \frac{1}{4}e^{2x}ln(2x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x+1)}\ e^{2x}\,dx$$

Finalmente :

$$\int \frac{x\,e^{2x}}{(2x+1)^2}\,dx = e^{2x}\frac{1}{4}ln((2x+1)) + \frac{e^{2x}}{4(2x+1)} - \frac{1}{4}e^{2x}ln(2x+1) = \frac{e^{2x}}{4(2x+1)}\ \square$$

2) Muestre que : $\int cos^n(x)\,dx = \frac{1}{n}\,cos^{n-1}(x)\,sen(x) + \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2}(x)\,dx$, con $n \in \mathbb{N}$

Solución:

Notemos que :

$cos^n(x) = cos^2(x)\,cos^{n-2}(x) = (1 - sen^2(x))\,cos^{n-2}(x) =$

$cos^{n-2}(x) - sen^2(x)\,cos^{n-2}(x)$

Sea $I_n = \int cos^n(x)\,dx$. Luego :

$I_n = \int cos^n(x)\,dx = \int cos^{n-2}(x)\,dx - \int sen^2(x)\,cos^{n-2}(x)\,dx =$

$I_{n-2} - \int sen^2(x)\,cos^{n-2}(x)\,dx \Rightarrow$

$$I_n = I_{n-2} - \int sen^2(x)\,cos^{n-2}(x)\,dx \qquad (*)$$

Calculemos ahora $\int sen^2(x)\,cos^{n-2}(x)\,dx$.
Antes de ocupar el método de integración por partes es necesario notar que :

$sen^2(x)\,cos^{n-2}(x) = sen(x)\,sen(x)\,cos^{n-2}(x)$

Ahora, usemos el método de integración por partes considerando

$p' = sen(x)\,cos^{n-2}(x) \Rightarrow p = -\frac{1}{n-1}\,cos^{n-1}(x)$, $n \neq 1$ (La obtención de este resultado se muestra abajo)

$q = sen(x) \Rightarrow q' = cos(x)$

$\therefore \int sen^2(x)\,cos^{n-2}(x)\,dx = \int sen(x)\,\left[sen(x)\,cos^{n-2}(x)\right]dx =$

$-\frac{1}{n-1}\,cos^{n-1}(x)\,sen(x) + \frac{1}{n-1}\int cos^{n-1}(x)\,cos(x)\,dx =$

$-\frac{1}{n-1}\,cos^{n-1}(x)\,sen(x) + \frac{1}{n-1}\int cos^n(x)\,dx =$

$-\frac{1}{n-1}\,cos^{n-1}(x)\,sen(x) + \frac{1}{n-1}I_n$

Hemos obtenido el resultado

$$\int sen^2(x)\,cos^{n-2}(x)\,dx = -\,\frac{1}{n-1}\,cos^{n-1}(x)\,sen(x) + \frac{1}{n-1} I_n \qquad (**)$$

Reemplazando $(**)$ en $(*)$ se tiene que :

$$I_n = I_{n-2} - \int sen^2(x)\,cos^{n-2}(x)\,dx \Rightarrow$$

$$I_n = I_{n-2} + \frac{1}{n-1}\,cos^{n-1}(x)\,sen(x) - \frac{1}{n-1} I_n \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) I_n = I_{n-2} + \frac{1}{n-1}\,cos^{n-1}(x)\,sen(x) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right) I_n = \frac{(n-1)\,I_{n-2} + cos^{n-1}(x)\,sen(x)}{n-1} \Rightarrow$$

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2} + \frac{1}{n}\,cos^{n-1}(x)\,sen(x) \Rightarrow$$

$$\int cos^n(x)\,dx = \frac{1}{n}\,cos^{n-1}(x)\,sen(x) + \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2}(x)\,dx$$

que es lo que se quería probar.

Para terminar el ejercicio falta considerar dos cosas pendientes, la primera es mostrar que

$$p' = sen(x)\,cos^{n-2}(x) \;\Rightarrow p = -\,\frac{1}{n-1}\,cos^{n-1}(x)\,,\; n \neq 1$$

En efecto

$$p' = sen(x)\,cos^{n-2}(x) \;\Rightarrow p = \int sen(x)\,cos^{n-2}(x)\,dx$$

Usemos el método de sustitución simple con $M = cos(x)$.

$$M = cos(x) \Rightarrow dM = -\,sen(x)\,dx \Rightarrow sen(x)\,dx = -\,dM$$

$$p = \int sen(x)\,cos^{n-2}(x)\,dx = \int cos^{n-2}(x)\;sen(x)\,dx = -\int M^{n-2}\,dM =$$

$$-\,\frac{M^{n-1}}{n-1} = -\,\frac{1}{n-1}\,cos^{n-1}(x)\,,\; n \neq 1$$

La segunda cosa que debemos mostrar es el resultado para el caso particular $n = 1$.

$$\int cos^n(x)\,dx = \int cos(x)\,dx = sen(x)$$

Este resultado concuerda con la fórmula obtenida pues para $n = 1$ se tiene que :

$$\int cos^n(x)\,dx = \frac{1}{n}\,cos^{n-1}(x)\,sen(x) + \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2}(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\int cos(x)\,dx = \frac{1}{1}\,cos^{1-1}(x)\,sen(x) + \frac{1-1}{1}\int cos^{1-2}(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\int cos(x)\,dx = sen(x)$$

Finalmente podemos decir que :

$\int cos^n(x)\,dx = \frac{1}{n}\,cos^{n-1}(x)\,sen(x) + \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2}(x)\,dx$, con $n \in \mathbb{N}$ ❏