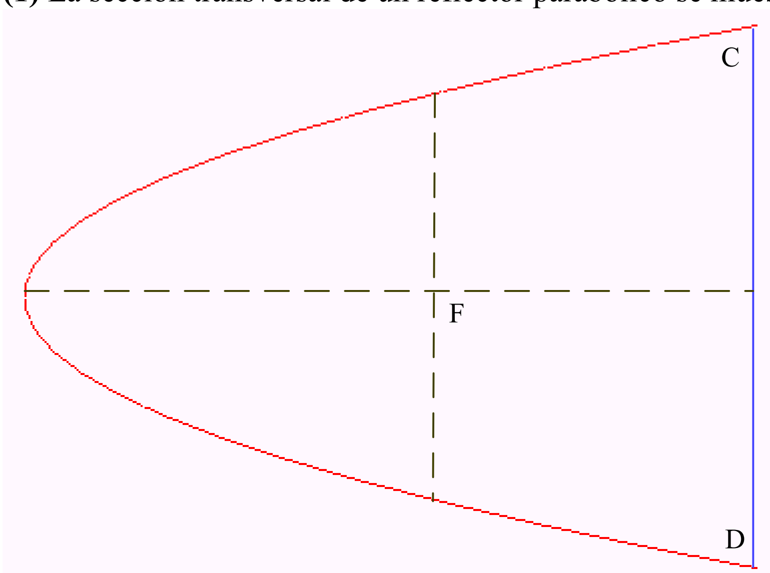
UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TAREA SUMATIVA (7 PUNTOS)
CÁLCULO I
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA - INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL
Vi 28 de octubre de 2005
Fecha de Entrega: Mi 02 de noviembre de 2005 a las 08:15 hrs.

(1) La sección transversal de un reflector parabólico se muestra a continuación.



La bombilla está localizada en el foco y la apertura del reflector en tal punto es 10 $cm.$

$a)$ Obtenga la ecuación de la parábola.

$(R : y^2 = 10x,$ si el vértice es el origen$)$

$b)$ Calcule el diámetro de la apertura $\overline{CD}$, $11\, cm.$ desde el vértice.

$(R : 2\sqrt{110}\,)$

<u>Solución:</u>

$a)$ Si el vértice es el origen del sistema de coordenadas, entonces la ecuación de la parábola tiene la forma general

$$(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$$

Pero $(h,k) = (0,0),$ luego la ecuación de la parábola es

$$y^2 = 4p\,x$$

Recordemos que el foco F está a una distancia de p unidades desde el vértice, y de acuerdo al enunciado en el foco la apertura de la parábola es 10, esto significa que el punto $(p, 5)$ satisface la ecuación de la parábola, es decir,

$$5^2 = 4p\,p \Rightarrow 4p^2 = 25 \Rightarrow p^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow p = \frac{5}{2}$$

$$\therefore\ y^2 = 4\,\frac{5}{2}\,x \Rightarrow y^2 = 10\,x \square$$

$b)$ Si estamos a 11 unidades del vértice significa que $x = 11,$ luego

$$y^2 = 10\,(11) = 110 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \ -\sqrt{110} \\ y_2 = \sqrt{110} \end{cases}$$

De los dos valores anteriores nos sirve sólo el valor positivo porque estamos hablando de distancia.
Finalmente el diámetro de la apertura $\overline{CD}$ es : $\ \ 2\,y_2 = 2\sqrt{110} \square$

(2) Una molécula del producto C se forma a partir de una molécula de un reactivo A y una molécula del reactivo B, con concentraciones iniciales $[A] = [B] = a$ moles$/L$. Entonces $[C] = a^2k\,t\,/(a\,k\,t + 1),$ donde k es una constante.
$a)$ Obtenga la tasa de reacción en el instante t.

$(R : \frac{a^2k}{(akt+1)^2})$

$b)$ Muestre que si $x = [C]$, entonces $\frac{dx}{dt} = k\,(a - x)^2$

Solución:
$a)$ La tasa de reacción en el instante t está dada por $\frac{d[C]}{dt}$

$$\frac{d[C]}{dt} = \left[\frac{a^2k\,t}{(a\,k\,t{+}1)}\right]' = \frac{(a^2k\,t)'\,(a\,k\,t{+}1) - (a^2\,k\,t)\,(\,a\,k\,t{+}1)'}{(a\,k\,t{+}1)^2} =$$

$$\frac{(a^2k\,)(a\,k\,t{+}1) - (a^2\,k\,t)\,(\,a\,k\,)}{(a\,k\,t{+}1)^2} = \frac{a^3k^2\,t + a^2k - a^3\,k^2\,t}{(a\,k\,t{+}1)^2} = \frac{a^2k}{(a\,k\,t{+}1)^2} \square$$

$b)$ De la parte $a)$ sabemos que $\frac{dx}{dt} = \frac{a^2k}{(a\,k\,t+1)^2} \qquad (*)$

Por otro lado,

$$k\,(a - x)^2 = k\,(a - \frac{a^2k\,t}{(a\,k\,t{+}1)})^2 = k\,(\frac{a^2k\,t + a - a^2k\,t}{(a\,k\,t{+}1)})^2 = k\,(\frac{a}{(a\,k\,t{+}1)})^2 =$$

$$k\,\frac{a^2}{(a\,k\,t{+}1)^2} = \frac{a^2k}{(a\,k\,t{+}1)^2} \qquad (**)$$

Comparando las expresiones $(*)$ y $(**)$ se tiene que $\frac{dx}{dt} = k\,(a-x)^2$ ❑

(3) La función posición de una partícula está dada por $s = t^3 - 4.5t^2 - 7t$, $t \geq 0$. ¿Cuándo la partícula alcanza una velocidad de $5\,m/s$?. $(R: t = 4\,s)$

<u>Solución:</u>

La velocidad es $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 9t - 7$

Se nos pide obtener el instante cuando la velocidad es $5\,m/s$

$v(t) = 5 \Rightarrow\ 3t^2 - 9t - 7 = 5 \Rightarrow 3t^2 - 9t - 12 = 0 \Rightarrow$

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{81+144}}{6} \Rightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{225}}{6} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{9+15}{6} = \frac{24}{6} = 4 \\ t_2 = \frac{9-15}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \end{cases}$$

Como $t \geq 0$, la solución que nos sirve es $t = t_1 = 4\,s$. ❑

(4) La ley de gravitación de Newton dice que la magnitud F de la fuerza ejercida por un cuerpo de masa m sobre un cuerpo de masa M es $F = \frac{GmM}{r^2}$, donde G es la constante gravitacional y r es la distancia entre los cuerpos. Si los cuerpos se están moviendo, calcule la tasa de cambio de F con respecto a r.

$\left(R:\ -2\,\frac{GmM}{r^3}\right)$

<u>Solución:</u>

La tasa de cambio de F con respecto a r es $\frac{dF}{dr}$

$$\frac{dF}{dr} = \left(\frac{GmM}{r^2}\right)' = GmM\,(r^{-2})' = GmM\,(-2\,r^{-3}) = -2\,\frac{GmM}{r^3}$$ ❑

(5) Muestre que la tasa de cambio del área de un círculo con respecto a su radio es igual a su perímetro.

<u>Solución:</u>

El área de un círculo es $A(r) = \pi\,r^2$, luego la tasa de cambio del área con respecto al radio es

$$\frac{dA}{dr} = (\pi\,r^2)' = 2\,\pi\,r = \text{Perímetro}$$ ❑

(6) Si la ecuación del movimiento de una partícula está dada por
$s = A\,cos(w\,t + d)$,
con $A \neq 0$ y $w \neq 0$, d constante real, entonces tal partícula obedece a un movimiento armónico simple.
$a)$ Calcule la velocidad de la partícula en el instante t.

$(R : v(t) = \,-\,w\,A\,sen(wt + d)\,)$

$b)$ ¿Cuándo la velocidad es 0?.

$(R : t = (n\pi - d)/w,\; n \in \mathbb{Z})$

<u>Solución:</u>

$a)$ La velocidad es

$$v(t) = s'(t) = (A\,cos(w\,t + d))' = \,-\,A\,sen(wt + d)\,(wt + d)' \Rightarrow$$

$$v(t) = \,-\,wAsen(wt + d)\,\square$$

$$b)\; v(t) = 0 \Rightarrow \,-\,wAsen(wt + d)\; = 0 \Rightarrow^{A\neq 0,\, w\neq 0}\; sen(w\,t + d) = 0 \Rightarrow$$

$$w\,t + d = n\pi \Rightarrow w\,t = n\pi - d \Rightarrow t = \tfrac{n\pi - d}{w},\; n \in \mathbb{Z}\,\square$$

(7) Si f es la longitud focal de un lente convexo y un objeto es ubicado a una distancia p del lente, entonces su imagen estará a una distancia q del lente, donde f, p y q están relacionados por la ecuación

$$\tfrac{1}{f} = \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q}$$

Calcule la tasa de cambio de p con respecto a q.

$(R :\, -\,\tfrac{f^2}{(q-f)^2}\,)$

<u>Solución:</u>
La tasa de cambio de p con respecto a q es $\frac{dp}{dq}$

Por otro lado

$$\tfrac{1}{f} = \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} \Rightarrow \tfrac{1}{p} = \tfrac{1}{f} - \tfrac{1}{q} \Rightarrow \tfrac{1}{p} = \tfrac{q-f}{fq} \Rightarrow p = \tfrac{fq}{q-f}$$

Luego, recordando que f es constante y que $q' = \frac{dq}{dq} = 1$ se tiene :

$$\tfrac{dp}{dq} = \left[\tfrac{fq}{q-f}\right]' = \tfrac{(fq)'\,(q-f)-(fq)(q-f)'}{(q-f)^2} = \tfrac{(f'q+f\,q')\,(q-f)-(fq)(q'-f')}{(q-f)^2} =$$

$$\tfrac{f'q^2-f'\,f\,q+f\,q\,q'-q'\,f^2-f\,q\,q'+f'\,fq}{(q-f)^2} = \tfrac{f'q^2-q'\,f^2}{(q-f)^2} = \tfrac{0\,q^2-f^2}{(q-f)^2} = \,-\,\tfrac{f^2}{(q-f)^2}\,\square$$