UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TAREA 4 CÁLCULO I

INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL
Vi 11 de Noviembre de 2005

ENTREGA : Lu 14/11/05 hasta 10:50 hrs. sala de clase.

Usted debe construir, con un trozo de alambre maleable de longitud L, un cuadrado y un triángulo equilátero de modo que optimice la suma de sus áreas.
Debe justificar teóricamente su construcción, indicando claramente la longitud del alambre usado.

Justificación:

Sean a un lado del cuadrado y b un lado del triángulo equilátero.

Entonces, si P_c es el perímetro del cuadrado y P_t el perímetro del triángulo, se tiene :

$$L = P_c + P_t = 4a + 3b \Rightarrow b = \tfrac{L-4a}{3} \qquad (1)$$

Si A_c es el área del cuadrado y A_t es el área del triángulo, entonces :

$$A = A_c + A_t = a^2 + \tfrac{1}{2}\, b\, h$$

donde $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\, b$

Luego,

$$A = a^2 + \tfrac{1}{2}\, b\, h = a^2 + \tfrac{1}{2}\, b\, \frac{\sqrt{3}}{2}\, b = a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\, b^2 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$A(a) = a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\tfrac{L-4a}{3}\right)^2 \Rightarrow A(a) = a^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}\,(L-4a)^2 \Rightarrow$$

$$A(a) = a^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}\,(L^2 - 8L\,a + 16\,a^2) \Rightarrow$$

$$A(a) = \left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\right) a^2 - \frac{2\sqrt{3}}{9}\, L\, a + \frac{\sqrt{3}}{36}\, L^2 \Rightarrow$$

$A'(a) = 2\left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\right) a - \frac{2\sqrt{3}}{9}\, L \ = 0 \Rightarrow a = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{9}\, L}{2\left(1+\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)} \Rightarrow$

$a = \frac{\sqrt{3}}{9+4\,\sqrt{3}}\, L \approx 0.108741\, L$

Veamos si el punto crítico obtenido es de máximo o de mínimo, para ello calculemos la segunda derivada.

$A''(a) = 2\left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\right) > 0$

Por lo tanto, el valor de a obtenido minimiza la suma de las áreas.

Debemos destinar $4a$ para construir el cuadrado y el resto para construir el triángulo.

Para el cuadrado : $4a = \frac{4\sqrt{3}}{9+4\,\sqrt{3}}\, L \approx 0.434964\, L$

Para el triángulo : $L - 4a = L - \frac{4\sqrt{3}}{9+4\,\sqrt{3}}\, L = \frac{9}{9+4\,\sqrt{3}}\, L \approx 0.565035\, L$

Observe que

$b = \frac{L-4a}{3} = \frac{L-\frac{4\sqrt{3}}{9+4\,\sqrt{3}}\, L}{3} = \frac{9}{3(9+4\,\sqrt{3}\,)}\, L = \frac{3}{9+4\,\sqrt{3}}\, L \approx 0.188345\, L\square$