UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

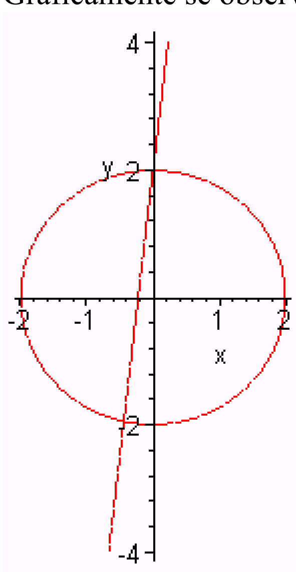
PAUTA TAREA 3 CÁLCULO I

INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL
Vi 21 de Octubre de 2005

ENTREGA : Vi 21/10/05 hasta 17:30 hrs. oficina del Profesor.

(1) Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando TODAS sus respuestas**.

$a)$ __F__ La recta $y = 9x + 2$ es tangente a la curva $x^2 + y^2 = 4$ en el punto $(0, 2)$.
Justificación:
Gráficamente se observa que la recta no es tangente a la circunferencia.



Analíticamente, para que la recta sea tangente a la circunferencia en el punto $(0, 2)$ se debe tener que $f'(0) = 9$, es decir, la derivada de la función que representa la curva evaluada en el supuesto punto de tangencia debe coincidir con la pendiente de la supuesta recta tangente.
Calculemos la derivada de la función que representa la circunferencia.
$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow (x^2 + y^2)' = (4)' \Rightarrow (x^2)' + (y^2)' = 0 \Rightarrow 2x + 2y\, y' = 0 \Rightarrow$

$y' = -\frac{2x}{2y} \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} \Rightarrow y'(0, 2) = -\frac{0}{2} = 0$
Luego, $y'(0, 2) = 0 \neq 9$ y la recta dada no es tangente a la curva en el punto $(0, 2)$♥

$b)$ __F__ Si $f(t) = \begin{cases} 2t^3 & , t \neq 0 \\ 1 & , t = 0 \end{cases}$, entonces $f'(0) = 3$.

Justificación:

$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h+0)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^3-1}{h}$ y este límite no existe.

Notemos que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{2h^3-1}{h} = -\infty \text{ y } \lim_{h\to 0^-} \frac{2h^3-1}{h} = \infty \ \heartsuit$$

$c)$ __F__ $f(x) = \begin{cases} 1 + sen\, x & , si\, x \leq 0 \\ ax^2 + 3 & , si\ 0 < x < 1 \\ 2bx + 3 & , si\, x \geq 1 \end{cases}$

es continua para todos los reales si $b = \frac{1}{2}a$.

Justificación:

Si $b = \frac{1}{2}a$, entonces $f(x) = \begin{cases} 1 + sen\, x & , si\, x \leq 0 \\ ax^2 + 3 & , si\ 0 < x < 1 \\ ax + 3 & , si\, x \geq 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} (1 + sen\, x) = 1 + sen(0) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} (ax^2 + 3) = 3$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \neq 3 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

La función no es continua en $x = 0$, porque los límites laterales son distintos y por lo tanto, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. ♥

$d)$ __F__ $\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t+9}-3}{t} = 0$

Justificación:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t+9}-3}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\sqrt{t+9}-3)}{t} \frac{(\sqrt{t+9}+3)}{(\sqrt{t+9}+3)} = \lim_{t\to 0} \frac{(t+9-9)}{t(\sqrt{t+9}+3)} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{t(\sqrt{t+9}+3)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{(\sqrt{t+9}+3)} = \frac{1}{(\sqrt{0+9}+3)} = \frac{1}{(3+3)} = \frac{1}{6} \neq 0 \heartsuit$$

(40 puntos)

(2) Sean f y $f\,'$ funciones continuas tal que $f(0) = 1$ y definamos la función $g(x) = x^2\, f(x)$.
Calcule $g\,'(0)$ y $\frac{d^2 g}{dx^2}(0)$.

(20 puntos)

<u>Solución:</u>

$g(x) = x^2\, f(x) \Rightarrow g'(x) = (x^2\, f(x)\,)' = (x^2)'\, f(x) + x^2\,(f(x))' =$

$2x\, f(x) + x^2\, f'(x) \Rightarrow g'(0) = 2(0)\, f(0) + 0^2\, f'(0) = 0 + 0 = 0$♥

$g'(x) = 2x\, f(x) + x^2\, f'(x) \Rightarrow g'\,'(x) = (2x\, f(x))' + (x^2\, f'(x)\,)' =$

$2f(x) + 2x\, f'(x) + 2x\, f'(x) + x^2\, f'\,'(x) = 2\, f(x) + 4x\, f'(x) + x^2\, f'\,'(x) \Rightarrow$

$g'\,'(0) = 2\, f(0) + 4(0)\, f'(0) + 0^2\, f'\,'(0) = 2\, f(0) = 2 \cdot\ 1 = 2$♥