

PAUTA TEST N° 5 CÁLCULO I
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL

NOMBRE : _____ **PTOS. :** _____
TIEMPO MÁXIMO : 50 MINUTOS **FECHA : Ju 24/11/05**

(1) Calcule los siguientes límites :

$$a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a \sqrt{a-x} \sqrt{x}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{x}}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{3n/2}$$

(30 puntos)

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a \sqrt{a-x} \sqrt{x}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{x}} = \frac{0}{0} \text{ L'H } \lim_{x \rightarrow a} \frac{(a \sqrt{a-x} \sqrt{x})'}{(\sqrt{a-x} - \sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\sqrt{x} - x \frac{1}{2} x^{-1/2}}{-\frac{1}{2} x^{-1/2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{-\sqrt{x} - \frac{x}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\frac{2x+x}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x}{1} = 3a$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{a \sqrt{a-x} \sqrt{x}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{x}} = 3a \square$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{3n/2}$$

Sea $y = \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{3n/2}$. Luego

$$\ln y = \frac{3n}{2} \ln \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2} \ln \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)$$

Pero

$$\frac{3n}{2} \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) = \frac{3}{2} \frac{\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2} \frac{\ln\left(\frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right)}{\frac{1}{n}}$$

Ahora, si $n \rightarrow \infty$, entonces $\frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ y $\ln(1) = 0$; además $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, por lo tanto observamos que existe una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

$$\text{Así, } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2} \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \frac{\ln\left(\frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{0}{0} L'H$$

$$\frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{2n+3} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)'}{-\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{2n+3} \left(\frac{2(2n+1) - 2(2n+3)}{(2n+1)^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} =$$

$$\frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{2n+3} \left(\frac{4n+2-4n-6}{(2n+1)^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{2n+3} \left(\frac{-4}{(2n+1)^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} =$$

$$\frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{2n+3} \left(\frac{-4}{(2n+1)^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = 6 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(2n+3)(2n+1)} =$$

$$6 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4n^2+8n+3} = \frac{0}{0} L'H \quad 6 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{8n+8} = \frac{0}{0} L'H \quad 6 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{8} =$$

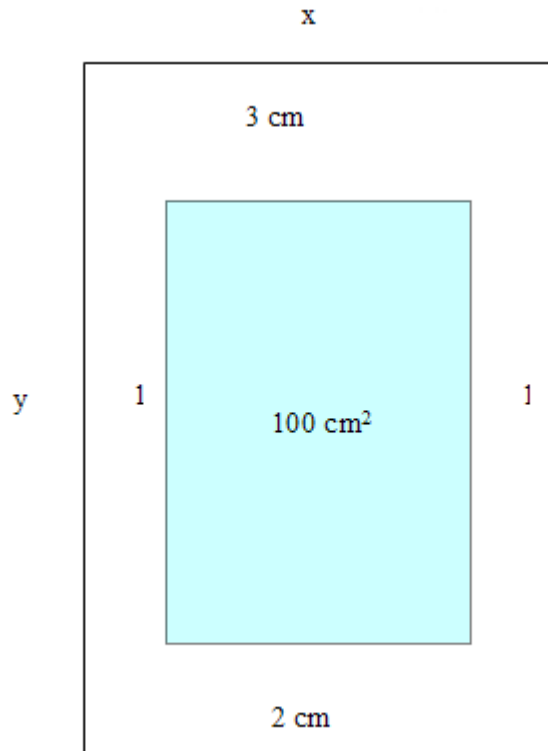
$$6 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{8} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \ln y = \ln\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y = e^{3/2} \square$$

(2) Un impresor recibe un pedido para producir un cartel rectangular que contiene 100 cm^2 de impresión rodeado de márgenes de 1 cm . a cada lado, 3 cm . en la parte superior y 2 cm . en la parte inferior. ¿Cuáles son las dimensiones del cartel más económico?.

(30 puntos)

Solución:



Sean x el largo y y el ancho del cartel. Luego

$$(x - 1 - 1)(y - 3 - 2) = 100 \Rightarrow (x - 2)(y - 5) = 100 \Rightarrow y - 5 = \frac{100}{x-2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{100}{x-2} + 5 \quad (*)$$

Lo que queremos optimizar es el área total del cartel. Si A representa esta área, entonces

$$A = xy \quad (**)$$

Reemplazando el y de $(*)$ en $(**)$:

$$A = x \left(\frac{100}{x-2} + 5 \right) = x \left(\frac{100+5x-10}{x-2} \right) = \frac{90x+5x^2}{x-2} \Rightarrow$$

$$A(x) = \frac{90x+5x^2}{x-2} \Rightarrow A'(x) = \frac{(90+10x)(x-2)-(90x+5x^2)}{(x-2)^2} \Rightarrow$$

$$A'(x) = \frac{90x-180+10x^2-20x-90x-5x^2}{(x-2)^2} \Rightarrow$$

$$A'(x) = \frac{5x^2-20x-180}{(x-2)^2}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 5x^2 - 20x - 180 = 0 \Rightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 4(5)(180)}}{10} \Rightarrow$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{4000}}{10} \Rightarrow x = \frac{20 \pm 20\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + 2\sqrt{10} \approx 8.32 \\ x_2 = 2 - 2\sqrt{10} \approx -4.32 \end{cases}$$

El valor x_2 no puede ser considerado como punto crítico porque es negativo y x mide una longitud que claramente es positiva o cero.

Analicemos si el punto crítico obtenido, es decir x_1 , es de máximo o mínimo.

	$x < x_1$	$x = x_1 \approx 8.32$	$x > x_1$
$\frac{5x^2 - 20x - 180}{(x-2)^2}$	—	0	+
	<i>decreciente</i>	<i>minimo</i>	<i>creciente</i>

De la tabla vemos que $x = x_1$ es un punto que minimiza el área total del cartel. Las dimensiones del cartel más económico son :

$$x = x_1 = 2 + 2\sqrt{10} \approx 8.32 \text{ cm.}$$

$$y = \frac{100}{x_1 - 2} + 5 = \frac{100}{2 + 2\sqrt{10} - 2} + 5 = \frac{100}{2\sqrt{10}} + 5 = \frac{50}{\sqrt{10}} + 5 = \frac{50 + 5\sqrt{10}}{\sqrt{10}} =$$

$$5 + 5\sqrt{10} \approx 20.81 \text{ cm. } \square$$