UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST Nº 3 CÁLCULO I

INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 60 MINUTOS FECHA : Ju 27/10/05

(1)
$a)$ Muestre que la ecuación de la recta tangente a la curva $y^2 = 4px$ en el punto (x_0, y_0) puede ser escrita como $y_0\, y = 2p(x + x_0)$
$b)$ ¿Cuál es la intersección con el eje horizontal?. Use esta información para dibujar la curva y la recta tangente a ella en el punto (x_0, y_0).

(20 puntos)

Solución:
Calculemos la derivada de y haciendo uso de la expresión $y^2 = 4px$:

$$y^2 = 4px \Rightarrow (y^2)' = (4px)' \Rightarrow 2y\, y' = 4p \Rightarrow y' = \frac{4p}{2y} \Rightarrow y' = \frac{2p}{y}$$

Luego, $y'(x_0, y_0) = \frac{2p}{y_0}$

y la recta tangente es :

$$y - y_0 = \frac{2p}{y_0}\,(x - x_0) \Rightarrow y_0\, y - y_0^2 = 2px - 2px_0 \Rightarrow$$

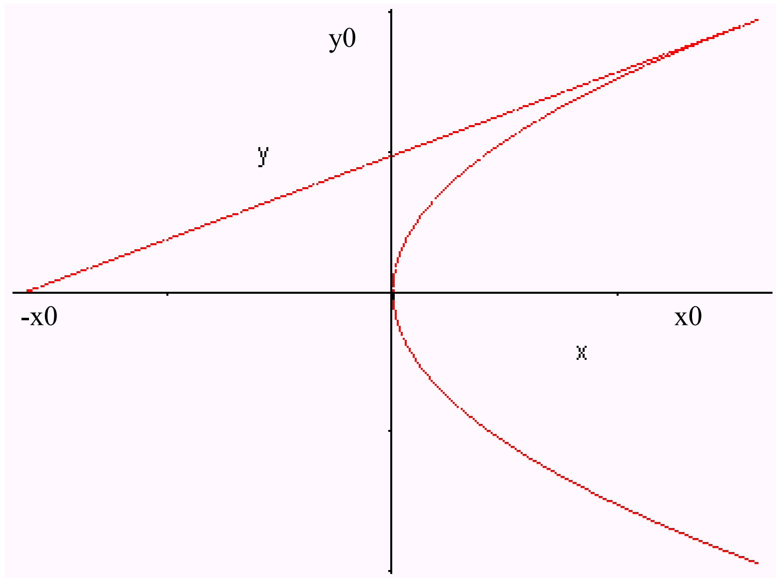
$$y_0\, y = 2px - 2px_0 + y_0^2 \overset{y_0^2 = 4px_0}{\Rightarrow} y_0\, y = 2px - 2px_0 + 4px_0 \Rightarrow$$

$$y_0\, y = 2px + 2px_0 \Rightarrow y_0\, y = 2p(x + x_0) \heartsuit$$

$b)$ La intersección con el eje horizontal se obtiene haciendo $y = 0$.

$$y_0\, y = 2p(x + x_0) \Rightarrow 0 = 2p(x + x_0) \overset{p>0}{\Rightarrow} x + x_0 = 0 \Rightarrow x = -x_0$$

El punto de intersección es $P(-x_0, 0)$.



♥

(2) Sea

$$f(x)=\begin{cases}1 & ,\ x\le -1\\ \frac{1}{ax+b} & ,\ -1<x<1\\ -5b & ,\ x\ge 1\end{cases}$$

Obtenga las constantes a y b de modo que f sea continua, y grafique esta función.

(20 puntos)

Solución:

La función $f(x)=1$ es continua para $x<-1$ porque es una función constante.
La función $f(x)=\frac{1}{ax+b}$ es continua, excepto quizás en $x=-\frac{b}{a}$, que es en donde se indetermina el cuociente.
La función $f(x)=-5b$ también es continua para $x>1$ porque es una función constante.
Verifiquemos ahora continuidad en los puntos de quiebre, es decir, en $x=-1$ y $x=1$.

Para $x=-1$:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1} 1=1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1} \frac{1}{ax+b}=\frac{1}{-a+b}$

Para que la función sea continua en $x=-1$, los límites laterales anteriores deben ser iguales, es decir,

$$1=\frac{1}{-a+b}\Rightarrow -a+b=1 \qquad (*)$$

Observe que $f(-1)=1$, por lo que esta condición estaría cumplida si se satisface $(*)$.

Para $x = 1$:
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{ax+b} = \frac{1}{a+b}$
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (-5b) = -5b$

Para que la función sea continua en $x = 1$, los límites laterales anteriores deben ser iguales, es decir,
$\frac{1}{a+b} = -5b \Rightarrow -5ab - 5b^2 = 1 \qquad (**)$

Observe que $f(1) = (-5b)$, por lo que esta condición estaría cumplida si se satisface $(**)$.

Resolvamos el sistema formado por $(*)$ y $(**)$:
$-a + b = 1 \Rightarrow b = 1 + a$
$-5ab - 5b^2 = 1$

$$-5ab - 5b^2 = 1 \Rightarrow -5a(1+a) - 5(1+a)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$-5a - 5a^2 - 5(1 + 2a + a^2) = 1 \Rightarrow -5a - 5a^2 - 5 - 10a - 5a^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$-10a^2 - 15a - 6 = 0 \Rightarrow 10a^2 + 15a + 6 = 0 \Rightarrow$$

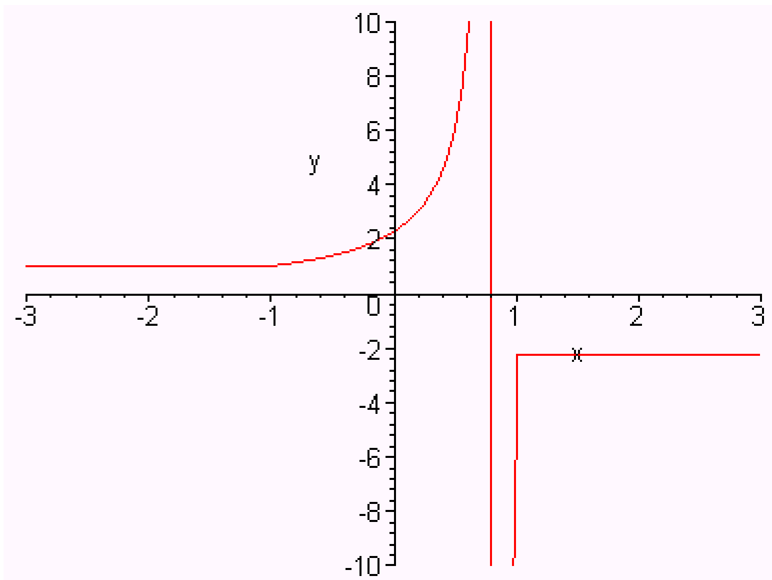
$$a = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4(10)(6)}}{20} \Rightarrow a = \frac{-15 \pm \sqrt{15}}{20} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{-15 + \sqrt{15}}{20} \approx -0.556 \\ a_2 = \frac{-15 - \sqrt{15}}{20} \approx -0.944 \end{cases}$$

De $b = 1 + a$ podemos obtener los valores correspondientes de b :
$b_1 = 1 + a_1 = 1 + \frac{-15 + \sqrt{15}}{20} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{20} \approx 0.444$
$b_2 = 1 + a_2 = 1 + \frac{-15 - \sqrt{15}}{20} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{20} \approx 0.056$

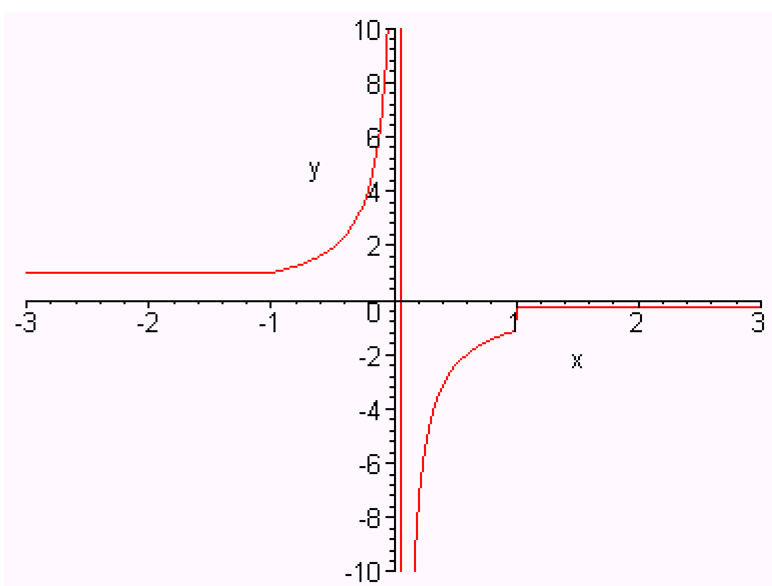
Falta verificar si $x = -\frac{b}{a} \in (-1, 1)$ para eliminar tal valor del intervalo.
Para a_1 y b_1 : $x = -\frac{b_1}{a_1} = -\frac{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{20}}{\frac{-15 + \sqrt{15}}{20}} = -\frac{5 + \sqrt{15}}{-15 + \sqrt{15}} \approx 0.797$
Para a_2 y b_2 : $x = -\frac{b_2}{a_2} = -\frac{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{20}}{\frac{-15 - \sqrt{15}}{20}} = -\frac{5 - \sqrt{15}}{-15 - \sqrt{15}} \approx 0.059$
Observamos que en ambos casos debemos eliminar los valores que indeterminan el cuociente $\frac{1}{ax+b}$

En resumen, las funciones son :

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq \; -1 \\ \dfrac{1}{\frac{-15+\sqrt{15}}{20}x+\frac{5+\sqrt{15}}{20}} & , \; -1 < x < 1, \; x \neq \; -\dfrac{5+\sqrt{15}}{-15+\sqrt{15}} \\ -\dfrac{5+\sqrt{15}}{4} & , x \geq 1 \end{cases}$$



$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq \; -1 \\ \dfrac{1}{\frac{-15-\sqrt{15}}{20}x+\frac{5-\sqrt{15}}{20}} & , \; -1 < x < 1, \; x \neq \; -\dfrac{5-\sqrt{15}}{-15-\sqrt{15}} \\ -\dfrac{5-\sqrt{15}}{4} & , x \geq 1 \end{cases}$$



♥

(3) Se define la función "coseno hiperbólico" , denotada $cosh(x)$, como:

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Calcule el polinomio de Maclaurin de grado 5 para $cosh(x)$.
Obs.: El *polinomio de Maclaurin de grado* n de una función f está dado por :

$$f(x) \approx f(0) + f\,'\,(0)\,x + \frac{f\,'\,'\,(0)}{2}x^2 + \,...\, + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}\,x^k$$

donde $f^{(k)}(0)$ denota la $k-$ésima derivada de f evaluada en $x = 0$.

(20 puntos)

Solución:

$$f(x) = cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f(0) = cosh(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow f'(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f'\,'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f'\,'(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} \Rightarrow f'\,'(0) = 1$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow f^{(3)}(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} \Rightarrow f^{(3)}(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f^{(4)}(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow f^{(5)}(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} \Rightarrow f^{(5)}(0) = 0$$

$$f(x) \approx f(0) + f\,'\,(0)\,x + \frac{f\,'\,'\,(0)}{2}x^2 + \frac{f^{\,(3)}\,(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{\,(4)}\,(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{\,(5)}\,(0)}{5!}x^5$$

$$= 1 + 0\,x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

$$\therefore\; f(x) = cosh(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \;♥$$