

**TEST N° 2 CÁLCULO I**  
**INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA**  
**INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL**

**NOMBRE :** \_\_\_\_\_ **PTOS. :** \_\_\_\_\_  
**TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS** **FECHA : Vi 14/10/05**

1) Grafique las curvas  $x^2 - 3y^2 + 3x - 2y = 10$  y  $2x^2 + 2y^2 - 4x - 2y = 6$ ,  
y marque los puntos de intersección.

**(30 puntos)**

**Solución:**

$$x^2 - 3y^2 + 3x - 2y = 10 \Rightarrow (x^2 + 3x) - (3y^2 + 2y) = 10 \Rightarrow$$

$$(x^2 + 3x) - 3(y^2 + \frac{2}{3}y) = 10 \Rightarrow$$

$$(x^2 + 3x + (\frac{3}{2})^2) - 3(y^2 + \frac{2}{3}y + (\frac{1}{3})^2) = 10 + (\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$(x + \frac{3}{2})^2 - 3(y + \frac{1}{3})^2 = 10 + \frac{9}{4} - \frac{1}{3} \Rightarrow (x + \frac{3}{2})^2 - 3(y + \frac{1}{3})^2 = \frac{143}{12} \Rightarrow$$

$$\frac{(x + \frac{3}{2})^2}{\frac{143}{12}} - \frac{(y + \frac{1}{3})^2}{\frac{143}{36}} = 1$$

Es una hipérbola con centro en  $(h, k) = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3})$ ,

$$a^2 = \frac{143}{12} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{143}{12}} \approx 3.45$$

$$b^2 = \frac{143}{36} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{143}{36}} \approx 1.99$$

Por otro lado, consideremos la curva  $2x^2 + 2y^2 - 4x - 2y = 6$

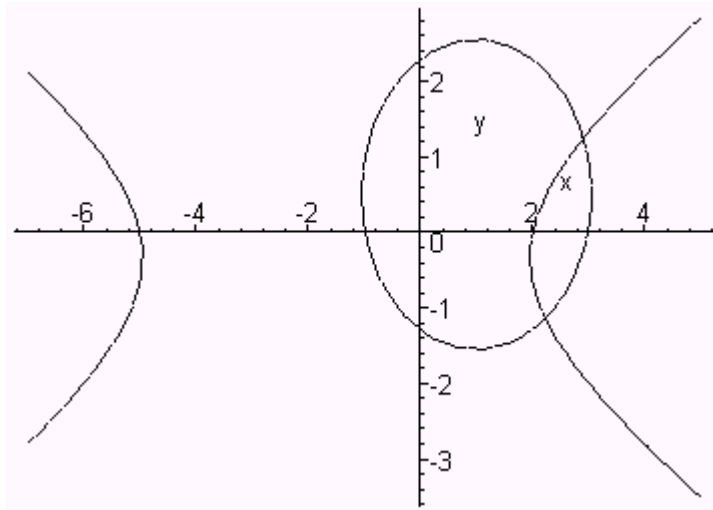
$$2x^2 + 2y^2 - 4x - 2y = 6 \Rightarrow (2x^2 - 4x) + (2y^2 - 2y) = 6 \Rightarrow$$

$$2(x^2 - 2x) + 2(y^2 - y) = 6 \Rightarrow 2[(x^2 - 2x) + (y^2 - y)] = 6 \Rightarrow$$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - y) = 3 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - y + (\frac{1}{2})^2) = 3 + 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$(x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{17}{4}$$

Es una circunferencia con centro  $(h, k) = (1, \frac{1}{2})$  y radio  $r = \frac{\sqrt{17}}{2} \approx 2.06$



2)

a) Determine el vértice y el valor de  $p$  para  $y^2 - ay - bx = c$ , donde  $a$ ,  $b$ , y  $c$  son constantes reales y  $b \neq 0$ .

b) Grafique la parábola  $-y^2 + 3y - 6x + 4 = 0$ , y obtenga el vértice y el valor de  $p$ .

**(30 puntos)**

**Solución:**

a)

$$y^2 - ay - bx = c \Rightarrow (y^2 - ay) = c + bx \Rightarrow$$

$$(y^2 - ay + (\frac{a}{2})^2) = c + bx + (\frac{a}{2})^2 \Rightarrow (y - \frac{a}{2})^2 = bx + c + \frac{a^2}{4} \Rightarrow$$

$$(y - \frac{a}{2})^2 = b(x + \frac{c}{b} + \frac{a^2}{4b}) \Rightarrow (y - \frac{a}{2})^2 = b(x - (-\frac{c}{b} - \frac{a^2}{4b}))$$

Si comparamos la ecuación anterior con la ecuación

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

no damos cuenta que el vértice tiene coordenadas  $(h, k) = \left( -\frac{c}{b} - \frac{a^2}{4b}, \frac{a}{2} \right)$  y

$$4p = b \Rightarrow p = \frac{b}{4}, \text{ suponiendo que } b > 0; \text{ si } b < 0, \text{ entonces } p = -\frac{b}{4}.$$

$$b) -y^2 + 3y - 6x + 4 = 0 \Rightarrow y^2 - 3y + 6x - 4 = 0$$

Comparando la ecuación  $y^2 - 3y + 6x = 4$  con  $y^2 - ay - bx = c$ , notamos que  $a = 3$ ,  $b = -6$  y  $c = 4$ ; luego por el resultado de la parte a) se tiene que el vértice es

$$(h, k) = \left( -\frac{c}{b} - \frac{a^2}{4b}, \frac{a}{2} \right) = \left( -\frac{4}{-6} - \frac{3^2}{4(-6)}, \frac{3}{2} \right) = \left( \frac{2}{3} + \frac{9}{24}, \frac{3}{2} \right) =$$

$$\left( \frac{25}{24}, \frac{3}{2} \right) \approx (1.04; 1.5)$$

$$\text{y } p = -\frac{b}{4} = -\frac{-6}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

La gráfica es :

