UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 3 CÁLCULO 1

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 30 MINUTOS FECHA : Ju 26/07/18

Responda V (Verdadero) o F (Falso), **justificando todas sus respuestas**.

$a)$__V___ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos(2x)+tg^2(x)}{x\,sen(x)} = 3$

Justificación:

Si observamos el límite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos(2x)+tg^2(x)}{x\,sen(x)}$ nos damos cuenta que existe una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ por lo que podemos aplicar la regla de L'Hopital inmediatamente.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(2x)+tg^2(x)}{x\,sen(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left[1-cos(2x)+tg^2(x)\right]'}{\left[x\,sen(x)\right]'} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{2sen(2x)+2\,tg(x)\,sec^2(x)}{sen(x)+x\,cos(x)}$$

Nuevamente podemos aplicar L'Hopital porque aparece una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2sen(2x)+2\,tg(x)\,sec^2(x)}{sen(x)+x\,cos(x)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{4\,cos(2x)+2\,sec^4(x)+4\,tg^2(x)\;sec^2(x)}{2\;cos(x)-x\,sen(x)} = \frac{4+2+0}{2-0} = \frac{6}{2} = 3$$

Finalmente

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(2x)+tg^2(x)}{x\,sen(x)} = 3 \;\square$$

$b)$ ___V___ La función $f(x) = cos(x)$ es decreciente en los intervalos $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ y creciente en los intervalos $((2k-1)\pi, 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$

Justificación:

$f(x) = cos(x) \Rightarrow f\,'(x) = -\,sen(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi,\; k \in \mathbb{Z}$

Por ejemplo, consideremos una tabla con algunos valores críticos.

	$-2\pi < x < -\pi$	$x = -\pi$	$-\pi < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \pi$
$f\,'(x) = -\,sen(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x) = cos(x)$	$decreciente$		$creciente$		$decreciente$

Si extendemos el razonamiento anterior, nos damos cuenta que efectivamente la función $f(x) = cos(x)$ es decreciente y creciente en los intervalos que se señalan. $\square$

$c)$ ___F___ Con 200 metros de malla se construye un cerco cuadrado de lado cuya longitud es h y otro cerco rectangular de lados cuyas longitudes son x y $2x.$ De acuerdo a las condiciones anteriores, es imposible maximizar el área total encerrada por los cercos.

Justificación:

Sean A_C el área del cuadrado, A_R el área del rectángulo y A es área total.

Luego $A = A_C + A_R = h^2 + x(2x) = h^2 + 2x^2$

Por otro lado, $200 = 4h + 6x$, de donde $h = \frac{200-6x}{4} = 50 - \frac{3}{2}\,x$

Reemplazando en A, se tiene:

$A(x) = (50 - \frac{3}{2}\,x)^2 + 2x^2 = 2500 - 150x + \frac{9}{4}\,x^2 + 2x^2 = 2500 - 150x + \frac{17}{4}\,x^2$

$A'(x) = \,-150 + \frac{17}{2}\,x = 0 \Rightarrow x = \frac{150}{\frac{17}{2}} = \frac{300}{17}$

Veamos si este valor crítico es de máximo o de mínimo.

$A''(x) = \frac{17}{2} > 0$

Esto muestra que $x = \frac{300}{17}$ es un valor de mínimo.

Por otro lado, $h = 50 - \frac{3}{2}\,x \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\,x \leq 50 \Rightarrow x \leq \frac{100}{3}$

Es decir, $0 \leq x \leq \frac{100}{3}$

Lo anterior muestra que es problema acotado. Esto muestra ya, que es posible maximizar el área.

Para $x = 0,\ A(0) = 2500$

Para $x = \frac{100}{3}$, $A(\frac{100}{3}) = 2500 - 150(\frac{100}{3}) + \frac{17}{4}\,(\frac{100}{3})^2$

$\approx 2500 - 5000 + 4722.2 = 2222.2$

Observamos que $x = 0$ es el valor de máximo. $\square$

$d)$___V___Todos los polinomios de la forma $p(x) = a + bx + x^2 + x^3$ poseen un punto de inflexión, donde a y b son constantes reales.

Justificación:

$p'(x) = b + 2x + 3x^2$

$p''(x) = 2 + 6x = 0 \Rightarrow x = \,-\frac{2}{6} = \,-\frac{1}{3}$

El valor anterior es un candidato a valor de inflexión. Para verificarlo construyamos la siguiente tabla:

	$x < -\frac{1}{3}$	$x = -\frac{1}{3}$	$x > -\frac{1}{3}$
$2+6x$	$-$	0	$+$
	$conc.\,hacia\,abajo$	$valor\,de\,inflex.$	$conc.\,hacia\,arriba$

La tabla anterior muestra que todos los polinomios de la forma dada poseen un punto de inflexión, con a y b constantes reales. $\square$

$e)$ ___F___ No existen dos números tales que su diferencia sea 121 y su producto sea mínimo.

Justificación:

Sean a y b los números. Luego:

$a - b = 121 \Rightarrow a = 121 + b$

$P = a \cdot b = (121 + b) \cdot b = 121\, b + b^2$

$P\,'(b) = 121 + 2b = 0 \Rightarrow b = \; - \frac{121}{2}$

El valor anterior es un candidato a máximo o mínimo. Para verificarlo debemos calcular la segunda derivada de P

$P\,''(b) = 2 > 0$

De lo anterior, notamos que $b = \; - \frac{121}{2} \; = \; - 60.5$ es un valor de mínimo.

Además, $a = 121 + b = 121 - \frac{121}{2} = \frac{121}{2} = 60.5$

Hemos mostrado que existen dos números $a = 60.5$ y $b = \; - 60.5$ tales que su diferencia es 121 y su producto es mínimo. ❑

$f)$___F___El gráfico de la función $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{3x-5}$ no posee asíntotas oblicuas.

Justificación:

Sea $y = mx + b$ la supuesta asíntota.

Calculemos m :

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2-2x+1}{3x^2-5x} =^{L'H} \lim_{x \to \infty} \frac{2x-2}{6x-5} =^{L'H} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Calculemos b :

$$b = \lim_{x \to \infty} [\, f(x) - mx \,] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2-2x+1}{3x-5} - \frac{1}{3}x \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2-2x+1}{3x-5} - \frac{x}{3} \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{3x^2-6x+3-x(3x-5)}{3(3x-5)} \right] =$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{3x^2-6x+3-3x^3+5x}{3(3x-5)} \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{-x+3}{9x-15} \right] =^{L'H} \lim_{x \to \infty} \left[\frac{-1}{9} \right] = \; - \frac{1}{9}$$

Luego, la función dada posee asíntota oblicua $y = \frac{1}{3}\, x - \frac{1}{9}$ ❑

(60 puntos)