UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 3 CÁLCULO 1

INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA - INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 2 HORAS 30 MINUTOS FECHA : Mi 23/11/05

(1) Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando TODAS sus respuestas**.

$a)$ __V__ La función $f(r) = 4\pi\, r^2 + 2$ es creciente en el intervalo $(0, 4)$.

Justificación:

$f'(r) = 8\pi\, r = 0 \Rightarrow r = 0$

	$r < 0$	$r = 0$	$r > 0$
$f'(r) = 8\pi\, r$	$-$	0	$+$
	$decrec.$		$creciente$

De la tabla, observamos que efectivamente la función es creciente en el intervalo $(0, 4)$; en realidad, es creciente para todos los reales positivos y en particular en el intervalo mencionado.❑

$b)$ __F__ La función $f(x) = x^3 - 3x$ posee máximo relativo en $x = 1$.

Justificación:

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x) = 3x^2 - 3$	$+$	0	$-$	0	$+$
	$creciente$		$decreciente$		$creciente$
		$maximo$		$minimo$	

De la tabla se ve que $x = 1$ es un punto de mínimo relativo y no máximo relativo como se plantea.❑

$c)$ __V__ $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{3^t - 2^t}{\sqrt{t}} = 0$

Justificación:

$$\lim_{t\to 0} \frac{3^t - 2^t}{\sqrt{t}} =^{\frac{0}{0}} L'H \lim_{t\to 0} \frac{(3^t - 2^t)'}{(\sqrt{t}\,)'} = \lim_{t\to 0} \frac{3^t ln(3) - 2^t\, ln(2)}{\frac{1}{2}\, t^{-1/2}} =$$

$$\lim_{t\to 0} 2\sqrt{t}\,(3^t ln(3) - 2^t\, ln(2)) = 2\sqrt{0}\,(3^0 ln(3) - 2^0\, ln(2) = 0$$❑

$d)$ __F__ $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$ no posee puntos de inflexión.

Justificación:
$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 9x^2 - 4x \Rightarrow f''(x) = 18x - 4 = 0 \Rightarrow$

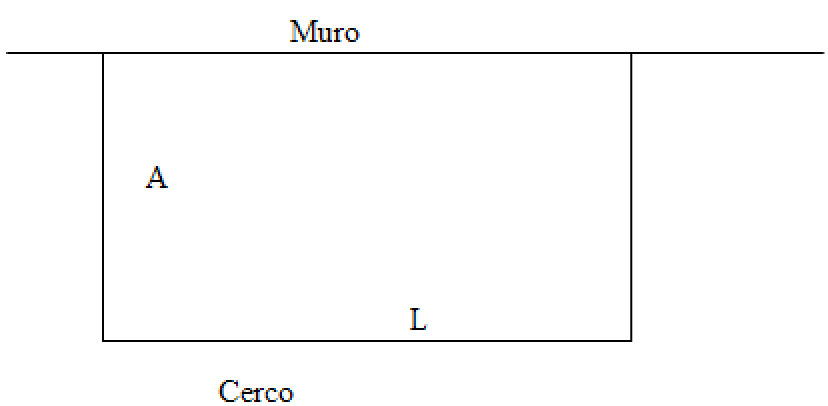
$x = \frac{4}{18} \Rightarrow x = \frac{2}{9} \approx 0.22$

	$x < \frac{2}{9}$	$x = \frac{2}{9}$	$x > \frac{2}{9}$
$f''(x) = 18x - 4$	$-$	0	$+$
	$conc.\, hacia\, abajo$		$conc.\, hacia\, arriba$
		$punto\, de\, inflexion$	

Observando la tabla notamos que $x = \frac{2}{9}$ es punto de inflexión, luego la afirmación es falsa.❑

$e)$ __F__ Si la diferencia entre dos números es 10, entonces para que el producto sea máximo los números deben tener signos distintos.
Justificación:
Sean x y y los números buscados, y sea P el producto. Luego
$x - y = 10$ (1)
$P = xy$ (2)
Despejando y de (1) :
$y = x - 10$ (3)
Reemplazando en (2) :
$P = x(x - 10) \Rightarrow P(x) = x^2 - 10x \Rightarrow P'(x) = 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$
Veamos si este punto es de máximo o de mínimo.
$P''(x) = (2x - 10)' = 2 > 0$
Luego, $x = 5$ es un punto de mínimo y observamos que no existe punto de maximización.❑

$f)$__F__Con una malla de $50\,m.$ se construye un corral rectangular aprovechando una pared. El área encerrada es máxima si el largo es igual al ancho.
Justificación:



Sean A el ancho del cerco y L el largo. Luego

$2A + L = 50 \qquad\qquad (1)$

Sea R el área encerrada. Tenemos entonces que

$R = A \cdot L \qquad\qquad (2)$

De (1) despejamos L : $\qquad L = 50 - 2A$

Reemplazando la expresión anterior en (2) :

$R = A \cdot L = A\,(50 - 2A) = 50\,A - 2\,A^2$

$R'(A) = 50 - 4A = 0 \Rightarrow A = \frac{50}{4} \Rightarrow A = 12.5$

$L = 50 - 2A = 50 - 2\,(12.5) = 50 - 25 = 25 \Rightarrow L = 25$

Ahora, $R''(x) = (50 - 4A)' = -4 < 0$, es decir, el punto obtenido es de máximo, pero el largo $L = 25$ es distinto del ancho $A = 12.5$ $\square$

(24 puntos).

(2) Con una plancha de $144\,cm.$ por $121\,cm.$ se construirá una caja. ¿Cómo deben ser los cortes para que el volumen de la caja sea máximo?. Calcule el volumen máximo.

(16 puntos).

<u>Solución:</u>

Consideremos el corte de longitud x, entonces si V es el volumen de la caja :

$V = (144 - 2x)(121 - 2x)x \Rightarrow V(x) = (17424 - 288x - 242x + 4x^2)x \Rightarrow$

$V(x) = 17424x - 530x^2 + 4x^3$

Luego

$V'(x) = 0 \Rightarrow 17424 - 1060x + 12x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1060 \pm \sqrt{(1060)^2 - 4(12)(17424)}}{24}$

$\Rightarrow x = \frac{1060 \pm \sqrt{1123600 - 836352}}{24} \Rightarrow x = \frac{1060 \pm \sqrt{287248}}{24} \Rightarrow$

$$x = \frac{1060 \pm 535.95}{24} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1060 + 535.95}{24} \approx 66.498 \\ x_2 = \frac{1060 - 535.95}{24} \approx 21.835 \end{cases}$$

Veamos ahora si los puntos obtenidos son de máximo o de mínimo.

$V''(x) = (17424 - 1060x + 12x^2)' = -1060 + 24x$

Evaluemos la segunda derivada en cada punto crítico :

$V''(x_1) = -1060 + 24(66.498) = 535.952 > 0 \Rightarrow x_1$ es punto de mínimo

$V''(x_2) = -1060 + 24(21.835) = -535.952 < 0 \Rightarrow x_2$ es punto de máximo

El corte debe ser de longitud $x_2 = 21.835\, cm.$, y el volumen máximo es

$V(21.835) = 17424(21.835) - 530(21.835)^2 + 4(21.835)^3 =$

$380453.04 - 252686.6293 + 41640.84943 = 169407.2601\, cm^3$ □

(3) Obtenga intersecciones con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos extremos, puntos de inflexión, intervalos de concavidad y la gráfica de $f(x) = \frac{5x^2-1}{3x+1}$

(20 puntos).

<u>Solución:</u>

$i)$ **Intersecciones con los ejes :**

Eje X : $y = 0 \Rightarrow y = f(x) = \frac{5x^2-1}{3x+1} = 0 \Rightarrow 5x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \approx \pm 0.447$

Eje Y : $x = 0 \Rightarrow y = \frac{5(0)^2-1}{3(0)+1} \Rightarrow y = \frac{-1}{1} \Rightarrow y = -1$

$ii)$ **Asíntotas :**

Verticales
Un aspirante a asíntota vertical es $x = -\frac{1}{3}$ (es el punto de indeterminación). Verifiquemos si es asíntota o no.

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}^+} \frac{5x^2-1}{3x+1} = -\infty$$

Luego, $x = -\frac{1}{3}$ es una asíntota vertical.

Oblicuas

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^2-1}{3x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-1}{x(3x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-1}{3x^2+x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(5x^2-1)'}{(3x^2+x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{10x}{6x+1} = \frac{\infty}{\infty} \lim_{x\to\infty} \frac{(10x)'}{(6x+1)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{10}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore\ m = \frac{5}{3} \approx 1.67$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{5x^2-1}{3x+1} - \frac{5}{3}x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{5x^2-1-5x^2-\frac{5}{3}x}{3x+1}\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{-1-\frac{5}{3}x}{3x+1}\right) = \frac{\infty}{\infty} \lim_{x\to\infty} \frac{(-1-\frac{5}{3}x)'}{(3x+1)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{5}{3}}{3} = -\frac{5}{9}$$

$$\therefore\ b = -\frac{5}{9} \approx -0.56$$

La asíntota oblicua tiene ecuación : $y = \frac{5}{3}x - \frac{5}{9}$.

$iii)$ **Intervalos de crecimiento y decrecimiento :**

$$f(x) = \frac{5x^2-1}{3x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(5x^2-1)'(3x+1)-(5x^2-1)(3x+1)'}{(3x+1)^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{10x(3x+1)-3(5x^2-1)}{(3x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{30x^2+10x-15x^2+3}{(3x+1)^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{15x^2+10x+3}{(3x+1)^2}$$

Así, se tiene que

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{15x^2+10x+3}{(3x+1)^2} = 0 \Rightarrow 15x^2 + 10x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100-4(15)(3)}}{30}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100-180}}{30} \in \mathbb{C}$$

Lo anterior indica que la expresión $15x^2 + 10x + 3$ es siempre positiva o siempre negativa. Para saberlo, probemos con $x = 0 :\ 15(0)^2 + 10(0) + 3 = 3 > 0.$ Por lo tanto, la expresión siempre es positiva. Lo anterior muestra que no existen puntos críticos, excepto el punto de indeterminación.

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \approx -0.33$$

	$x < -\frac{1}{3}$	$x = -\frac{1}{3}$	$x > -\frac{1}{3}$
$f'(x) = \frac{15x^2+10x+3}{(3x+1)^2}$	$+$	$indet.$	$+$
	$creciente$		$creciente$

La función es creciente en toda la recta real.

$iv)$ **Puntos extremos :**

De la tabla observamos que no existen puntos extremos.

$v)$ **Puntos de inflexión :**

Calculemos la segunda derivada de la función dada.

$$f'(x) = \frac{15x^2+10x+3}{(3x+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(15x^2+10x+3)'(3x+1)^2 - (15x^2+10x+3)\left[(3x+1)^2\right]'}{(3x+1)^4} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{(30x+10)(3x+1)^2 - (15x^2+10x+3)\left[2(3x+1)(3)\right]}{(3x+1)^4} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{(3x+1)\left[(30x+10)(3x+1) - 6\,(15x^2+10x+3)\right]}{(3x+1)^4} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{\left[90x^2+60x+10-90x^2-60x-18\right]}{(3x+1)^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{-8}{(3x+1)^3}$$

Por lo tanto, $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-8}{(3x+1)^3} = 0$

Lo que no se puede dar, pues $-8 \neq 0$. Luego, el único punto crítico es el punto que indetermina la segunda derivada, es decir, $x = -\frac{1}{3} \approx -0.33$

	$x < -\frac{1}{3}$	$x = -\frac{1}{3}$	$x > -\frac{1}{3}$
$\frac{-8}{(3x+1)^3}$	$+$	$indeterminado$	$-$
	$concava\,hacia\,arriba$	$punto\,de\,inflexion$	$concava\,hacia\,abajo$

El punto de inflexión es $x = -\frac{1}{3}$.

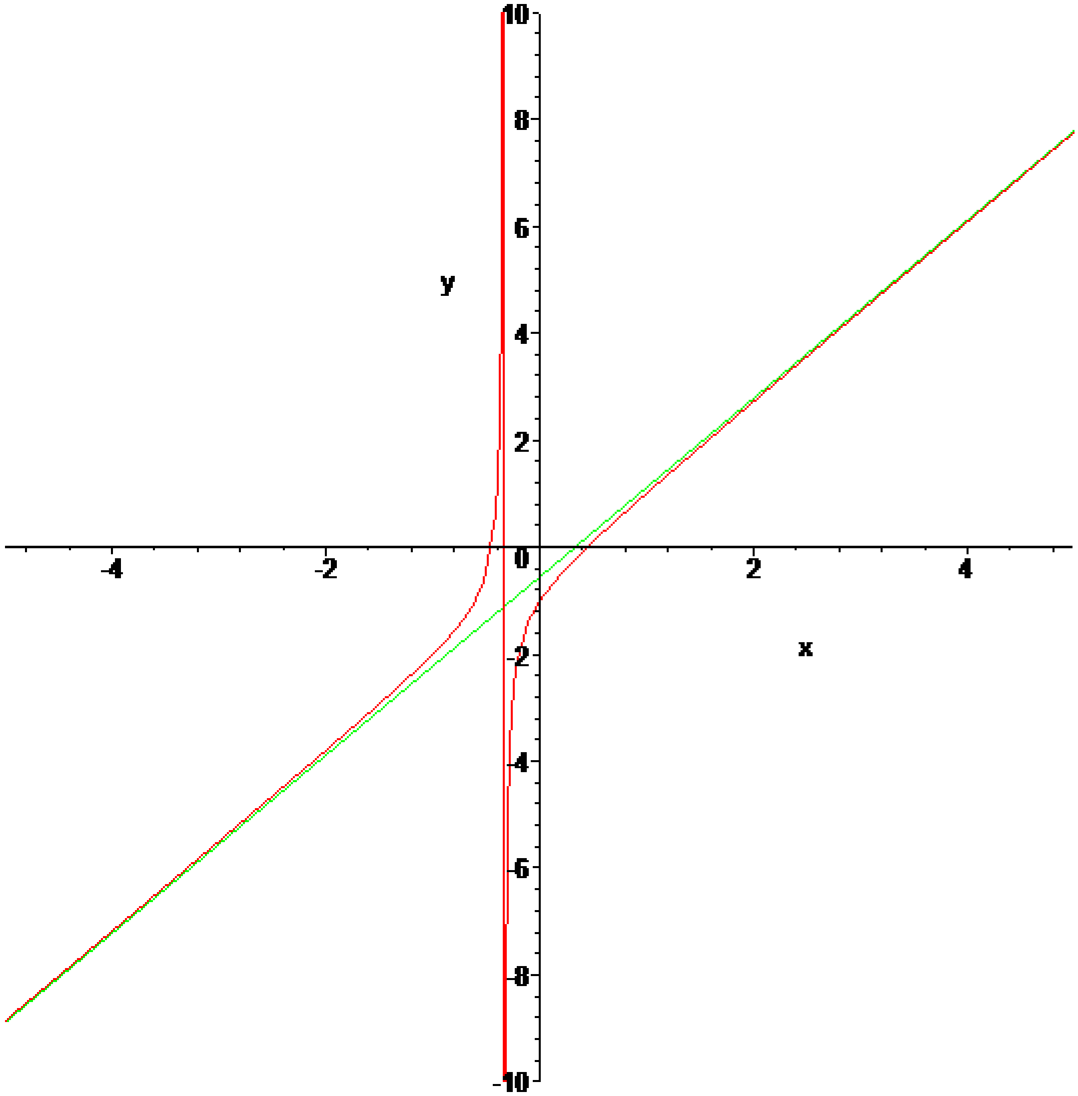
$vi)$ **Intervalos de concavidad :**

De la tabla anterior notamos que

Cóncava hacia arriba : $\left(-\infty \, , \; -\frac{1}{3} \right)$

Cóncava hacia abajo : $\left(-\frac{1}{3} \, , \, \infty \right)$

$vii)$ **Gráfica :**



$\square$