UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 2 CÁLCULO I
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL - INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 50 MINUTOS FECHA : Vi 26/10/07

Responda Verdadero (V) o Falso (F), justificando todas sus respuestas.

(6 puntos cada una).

$a)$ __V__ Una masa amarrada a un resorte vertical tiene una función posición dada por $y(t) = a \cdot sen(\omega \cdot t)$, donde a es la amplitud de sus oscilaciones y ω es una constante. Entonces la aceleración es proporcional al desplazamiento y.

Justificación:

Recordemos que $a(t) = y''(t)$

$y(t) = a \cdot sen(\omega \cdot t) \Rightarrow y'(t) = a\,\omega\, cos(\omega \cdot t) \Rightarrow$

$$a(t) = y''(t) = -a\,\omega^2 sen(\omega \cdot t) = -w^2\,(a \cdot sen(\omega \cdot t)) = -w^2\,y(t)$$

Como $-w^2$ es una constante, efectivamente la aceleración es proporcional al desplazamiento y.★

$b)$ __F__ La recta tangente a la curva $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0) perteneciente a la curva es $x_0 x + y_0 y = a^2 b^2$

Justificación:

Calculemos en primer lugar la derivada de y con respecto a x, que corresponde a la pendiente de la recta tangente.

Derivando en forma implícita :

$$\left[\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right]' = (1)' \Rightarrow \left[\frac{x^2}{a^2}\right]' - \left[\frac{y^2}{b^2}\right]' = 0 \Rightarrow \frac{2x}{a^2} - \frac{2y\,y'}{b^2} = 0 \Rightarrow$$

$$2b^2 x - 2a^2 y\,y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2b^2 x}{2a^2 y} \Rightarrow y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Luego : $y'\Big|_{(x_0,y_0)} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$

Por lo tanto, la recta tangente a la curva en el punto (x_0, y_0) es :

$$y - y_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}\,(x - x_0) \Leftrightarrow a^2 y_0\, y - b^2 x_0\, x = a^2 y_0^2 - b^2 x_0^2$$

Contrajemplo : $a = 1\,,\; b^2 = 2,\; (x_0, y_0) = (\sqrt{\frac{3}{2}}\;;\,1)\,;$

$$y'\Big|_{(x_0,y_0)} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} = \frac{2\sqrt{\frac{3}{2}}}{1} = \sqrt{6}$$

Pendiente recta tangente calculada :

$m_c = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} = \sqrt{6} \qquad (*)$

Pendiente recta tangente dada en el enunciado :

$x_0 x + y_0 y = a^2 b^2 \Leftrightarrow y = -\frac{x_0}{y_0}x + \frac{a^2b^2}{y_0} \Rightarrow m_d = -\frac{x_0}{y_0} = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \ (**)$

Las pendientes $(*)$ y $(**)$ no coinciden.★

$c)$ __F___ Si $xy = 1$ y $\frac{dx}{dt} = 4,$ entonces cuando $x = 2$ se tiene que $\frac{dy}{dt} = 2$

Justificación:

$xy = 1 \Rightarrow \frac{d(xy)}{dt} = \frac{d(1)}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt}\, y + x\,\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{\frac{dx}{dt}\, y}{x} \qquad (*)$

Por otro lado, como $x = 2,$ se tiene de $xy = 1$ que $y = \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

Reemplazando estos valores en $(*)$:

$\frac{dy}{dt} = -\frac{\frac{dx}{dt}\, y}{x} = -\frac{4\frac{1}{2}}{2} = -1 \neq 2$★

$d)$ ___F__ Si $J(t) = e^{e^{t^2}}$, entonces $J''(t) = 4\, e^{e^{t^2}}$

Justificación:

$J(t) = e^{e^{t^2}} \Rightarrow J'(t) = e^{e^{t^2}}(e^{t^2})' = e^{e^{t^2}} e^{t^2}(t^2)' = e^{e^{t^2}} e^{t^2} 2t = 2t\, e^{t^2} e^{e^{t^2}} \Rightarrow$

$J''(t) = \left[J'(t)\right]' = \left[2\, t\, e^{t^2} e^{e^{t^2}}\right]' = 2\left[(t\, e^{t^2})\, e^{e^{t^2}}\right]' = 2(t\, e^{t^2})' e^{e^{t^2}} + 2(t\, e^{t^2})\, (e^{e^{t^2}})' =$

$2(e^{t^2} + t\, e^{t^2} 2\, t)\, e^{e^{t^2}} + 2(t\, e^{t^2})\, (2t\, e^{t^2} e^{e^{t^2}}) = 2e^{t^2} e^{e^{t^2}} + 4t^2 e^{t^2} e^{e^{t^2}} + 4t^2 (e^{t^2})^2 e^{e^{t^2}} \neq$
$4\, e^{e^{t^2}}$ ★

$e)$ __F___ $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-1}{|x-1|}$ no existe

Justificación:

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-1}{|x-1|} = \frac{2^3-1}{|2-1|} = \frac{8-1}{1} = 7 \neq$ no existe.★

$f)$ __F___ La función

$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{15}-a^{15}}{x-a} & ,\ x < a \\ 2a^{14} & ,\ x \geq a \end{cases}$ es continua en $\mathbb{R}$ no importando el valor de a.

Justificación:

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{x^{15}-a^{15}}{x-a} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x \to a} \frac{(x^{15}-a^{15})'}{(x-a)'} = \lim\limits_{x \to a} \frac{15x^{14}}{1} = \lim\limits_{x \to a} 15x^{14} = 15a^{14}$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} 2a^{14} = 2a^{14}$

Si $a = 1$, por ejemplo, entonces la función f no es continua en $x = 1$, pues

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 15 \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$, es decir, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe.★

$g)$ ___V__ Si f es la longitud focal de un lente convexo y un objeto es ubicado a una distancia p del lente, entonces su imagen estará a una distancia q del lente, donde f, p y q están relacionados por la ecuación $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. La tasa de cambio de q con respecto a p es $-\frac{f^2}{(p-f)^2}$

Justificación:

Es importante observar que la longitud focal f es constante.

$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{p-f}{fp} \Rightarrow q = \frac{f\,p}{p-f} \Rightarrow$

$$\frac{dq}{dp} = \left[\frac{f\,p}{p-f}\right]' = \frac{(f\,p)'\,(p-f)-(fp)\,(p-f)'}{(p-f)^2} = \frac{f(p-f)-(fp)}{(p-f)^2} = \frac{fp-f^2-fp}{(p-f)^2} = \frac{-f^2}{(p-f)^2} \bigstar$$

$h)$ ___F__ Si $A(r) = Arctg(\frac{1}{r})$, entonces $A''(1) = -\frac{1}{2}$

Justificación:

$A(r) = Arctg(\frac{1}{r}) \Rightarrow A'(r) = \frac{1}{1+(\frac{1}{r})^2}(\frac{1}{r})' = \frac{1}{1+\frac{1}{r^2}}(-r^{-2}) = -\frac{1}{\frac{r^2+1}{r^2}}\frac{1}{r^2} = -\frac{r^2}{1+r^2}\frac{1}{r^2}$

$= -(1+r^2)^{-1} \Rightarrow$

$A''(r) = (-(1+r^2)^{-1})' = (1+r^2)^{-2}(2r) = \frac{2r}{(1+r^2)^2}$

Luego : $A''(1) = \frac{2(1)}{(1+1^2)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}\bigstar$

$i)$ __F___ $f^{(8)}(x) = 8f(x)$ si $f(x) = cos(x-1)\,sen(1-x)$.

Justificación:

Sea $u = 1 - x$, luego $-u = x - 1$, $u' = -1$ y así

$f(x) = cos(-u)\,sen(u) =^{cos\,es\,par} cos(u)\,sen(u) = \frac{1}{2}\,sen(2u)$

$$f^{(1)}(x) = \left[\frac{1}{2}\,sen(2u)\right]' = \frac{1}{2}\,cos(2u)\,(2u)' = -cos(2u)$$

$$f^{(2)}(x) = \left[-cos(2u)\right]' = sen(2u)\,(2u)' = -2\,sen(2u)$$

$$f^{(3)}(x) = \left[-2\,sen(2u)\right]' = -2\,cos(2u)\,(2u)' = 2^2\,cos(2u)$$

$$f^{(4)}(x) = \left[2^2\,cos(2u)\right]' = -2^2\,sen(2u)\,(2u)' = 2^3\,sen(2u)$$

$$f^{(5)}(x) = \left[2^3\, sen(2u)\right]' = 2^3\, cos(2u)\,(2u)' = -\,2^4\, cos(2u)$$

$$f^{(6)}(x) = \left[-\,2^4\, cos(2u)\right]' = 2^4\, sen(2u)\,(2u)' = -\,2^5\, sen(2u)$$

$$f^{(7)}(x) = \left[-\,2^5\, sen(2u)\right]' = -\,2^5\, cos(2u)\,(2u)' = 2^6\, cos(2u)$$

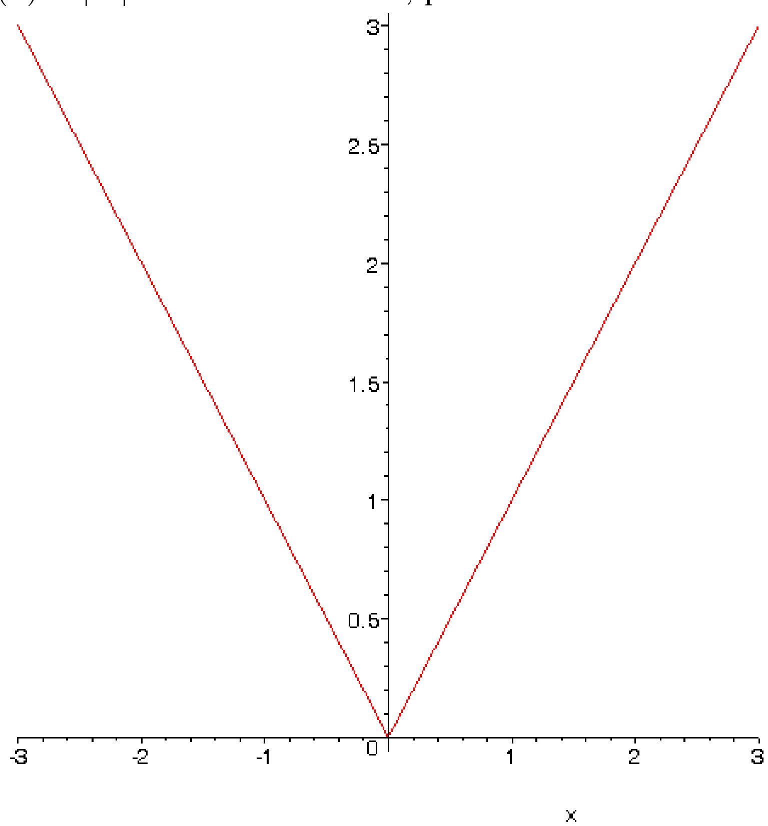
$$f^{(8)}(x) = \left[2^6\, cos(2u)\right]' = -\,2^6\, sen(2u)\,(2u)' = 2^7\, sen(2u)$$

$\therefore\;\; f^{(8)}(x) = 2^7\, sen(2u) = 2^7\, sen(2(1-x)) = 2^8\, sen(1-x)\, cos(1-x) =$

$256\, sen(1-x)\, cos(1-x) \neq 8\, f(x) = 8\, cos(x-1)\, sen(1-x) =$

$8\, cos(1-x)\, sen(1-x)$ ★

$j)$ __F___ Toda función continua es también derivable
Justificación:
$f(x) = |\,x\,|$ es continua en $x = 0,$ pero no es derivable en tal punto.



En general, todas las funciones cuyas gráficas tengan "puntas", pueden ser continuas en tales puntas, pero no derivables.★