UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 2 CÁLCULO 1

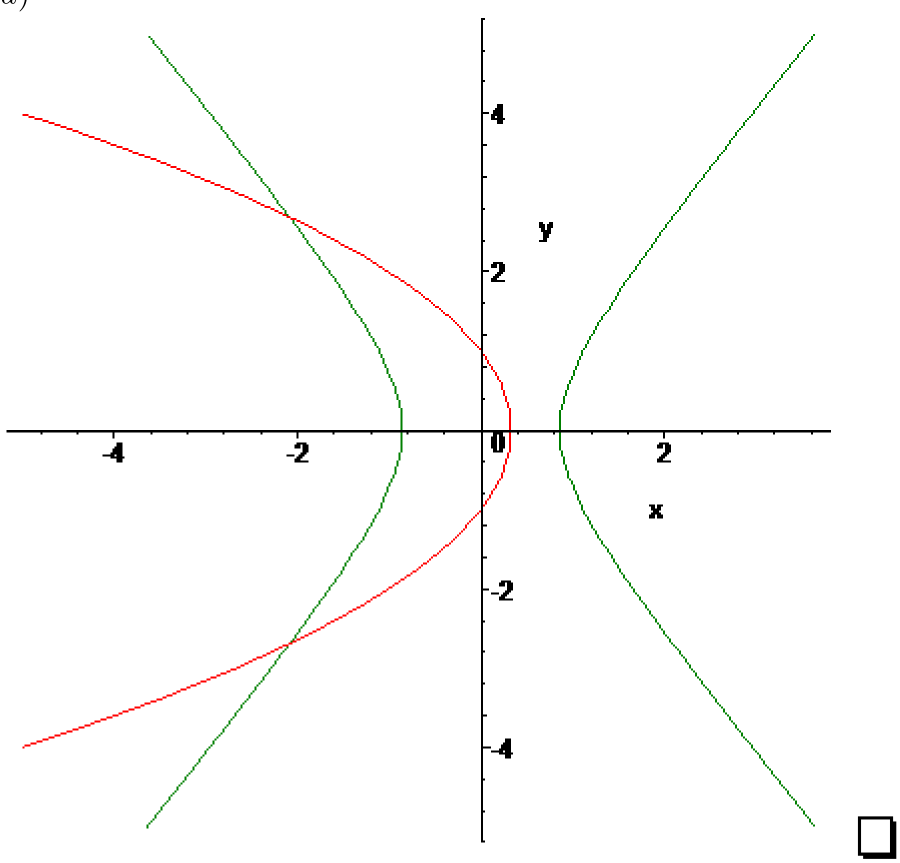
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL – INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 30 MINUTOS FECHA : Ju 21/06/18

(1) $a)$ Grafique $y^2+1=-3x+2$ y $4x^2-2y^2=3$ en un mismo sistema de ejes coordenados.
$b)$ Obtenga los puntos de intersección de las curvas mencionadas en $a)$

(20 puntos)

$a)$



$b)$ $y^2+1=-3x+2 \Rightarrow y^2=-3x+2-1 \Rightarrow y^2=-3x+1$
Reemplazando lo anterior en $4x^2-2y^2=3$ se tiene

$4x^2 - 2(-3x+1) = 3 \Rightarrow 4x^2 + 6x - 2 = 3 \Rightarrow 4x^2 + 6x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36+80}}{8}$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{116}}{8} \Rightarrow x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{29}}{8} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3+\sqrt{29}}{4} \approx 0.6 \\ x_2 = \frac{-3-\sqrt{29}}{4} \approx -2.1 \end{cases}$$

Para $x_1 = \frac{-3+\sqrt{29}}{4} = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{29}}{4} \approx 0.6,$ notamos que

$$y^2 = \frac{9}{4} - \frac{3\sqrt{29}}{4} + 1 = \frac{13}{4} - \frac{3\sqrt{29}}{4} \approx -0.8 < 0$$

lo que es imposible para números reales, pues y^2 es no negativo.

Consideremos ahora $x_2 = \frac{-3-\sqrt{29}}{4} = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{29}}{4} \approx -2.1$

$$y^2 = \frac{9}{4} + \frac{3\sqrt{29}}{4} + 1 = \frac{13}{4} + \frac{3\sqrt{29}}{4} \approx 7.3 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \sqrt{\frac{13}{4} + \frac{3\sqrt{29}}{4}} \approx 2.7 \\ y_2 = -\sqrt{\frac{13}{4} + \frac{3\sqrt{29}}{4}} \approx -2.7 \end{cases}$$

Finalmente, los puntos de intersección son

$P_1 = (x_2, y_1) = \left(-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{29}}{4}, \sqrt{\frac{13}{4} + \frac{3\sqrt{29}}{4}}\right)$ y

$P_2 = (x_2, y_2) = \left(-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{29}}{4}, -\sqrt{\frac{13}{4} + \frac{3\sqrt{29}}{4}}\right)$ ❏

(2) Responda V (Verdadero) o F (Falso), **justificando todas sus respuestas.**

$a)$__F__ La pendiente positiva de la recta tangente a $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto $x = \frac{a}{2}$ es $\frac{ab-b}{\sqrt{3}\,a}$, con $a > 0$, $b > 0$ y $a > b$

Justificación:

En primer lugar obtengamos el o los puntos de tangencia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Rightarrow y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \Rightarrow y = \pm b\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}$$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Si $x = \frac{a}{2}$, entonces $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \pm \frac{b}{a}\sqrt{\frac{3a^2}{4}}$

$$= \pm \frac{ba}{2a}\sqrt{3} = \pm \frac{b}{2}\sqrt{3}$$

De lo anterior, se concluye que los puntos de tangencia son $A = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\sqrt{3}\right)$ y $B = \left(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\sqrt{3}\right)$

Determinemos ahora la pendiente de la recta tangente
$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)' = (1)' \Rightarrow \frac{2x}{a^2}+\frac{2y\,y'}{b^2}=0 \Rightarrow \frac{2y\,y'}{b^2} = -\frac{2x}{a^2} \Rightarrow y' = -\frac{2b^2x}{2a^2y}$
$\Rightarrow y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$
Reemplazando las coordenadas de A en lo anterior se tiene
$m_A = -\frac{b^2\frac{a}{2}}{a^2\frac{b}{2}\sqrt{3}} = -\frac{ab^2}{a^2b\sqrt{3}} = -\frac{b}{a\sqrt{3}} < 0$

Como buscamos la pendiente positiva, la anterior no me sirve, pero si reemplazo las coordenadas de B, se obtiene $m_B = \frac{b}{a\sqrt{3}} \neq \frac{ab-b}{\sqrt{3}\,a}$

Otra forma de resolver el ejercicio es trabajar con un contraejemplo.
Si consideramos, por ejemplo, que $a=3$, $b=2$, entonces $x=\frac{3}{2}$ y $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$
De donde se tiene que $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{\frac{9}{4}}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{y^2}{4}=1$
$\Rightarrow \frac{y^2}{4}=1-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{y^2}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow y^2=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{3}$
Derivando la ecuación $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ se tiene $\frac{2x}{9}+\frac{2y\,y'}{4}=0 \Rightarrow \frac{2y\,y'}{4} = -\frac{2x}{9}$
$\Rightarrow \frac{y\,y'}{4} = -\frac{x}{9} \Rightarrow y' = -\frac{4x}{9y}$
Reemplazando $x=\frac{3}{2}$ y $y=-\sqrt{3}$ la pendiente es
$y' = \frac{4\frac{3}{2}}{9\sqrt{3}} = \frac{6}{9\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \neq \frac{ab-b}{\sqrt{3}\,a} = \frac{6-2}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ ❑

$b)$ __V___ Si $-1<x<1$, entonces $y(x) = x+1-\frac{x}{2}\,ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ es solución de la ecuación diferencial $(1-x^2)\,y''-2x\,y'+2y=0$
Justificación:
$y' = 1-\frac{1}{2}\,ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{x}{2}\,\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = 1-\frac{1}{2}\,ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{x}{2}\,\frac{1-x}{1+x}\left(\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}\right)$
$= 1-\frac{1}{2}\,ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{x}{2}\,\frac{1-x}{1+x}\,\frac{2}{(1-x)^2} = 1-\frac{1}{2}\,ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{x}{1-x^2}$

$y'' = -\frac{1}{2}\,\frac{1-x}{1+x}\,\frac{2}{(1-x)^2}-\frac{1-x^2-x(-2x)}{(1-x^2)^2} = -\frac{1}{1-x^2}-\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{-(1-x^2)-1-x^2}{(1-x^2)^2}$
$= \frac{-1+x^2-1-x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{-2}{(1-x^2)^2}$
Luego
$(1-x^2)\,y''-2x\,y'+2y$
$= (1-x^2)\,\frac{-2}{(1-x^2)^2}-2x\left(1-\frac{1}{2}\,ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{x}{1-x^2}\right)+2\left(x+1-\frac{x}{2}\,ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)$
$= \frac{-2}{1-x^2}-2x+x\,ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{2x^2}{1-x^2}+2x+2-x\,ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{-2}{1-x^2}+\frac{2x^2}{1-x^2}+2$
$= \frac{-2+2x^2+2(1-x^2)}{1-x^2} = \frac{-2+2x^2+2-2x^2}{1-x^2} = \frac{0}{1-x^2} = 0$, pues $-1<x<1$ ❑

$c)$ ___F___ $\frac{d}{dt}\left(\lim\limits_{a\to 1} \frac{a^2t-2t^2}{a\sqrt[4]{t}}\right) > 0$ para $t > 0$

Justificación:

$\lim\limits_{a\to 1} \frac{a^2t-2t^2}{a\sqrt[4]{t}} = \frac{t-2t^2}{\sqrt[4]{t}} = \frac{t-2t^2}{t^{1/4}} = \frac{t}{t^{1/4}} - \frac{2t^2}{t^{1/4}} = t^{3/4} - 2\,t^{7/4}$

$\frac{d}{dt}\left(\lim\limits_{a\to 1} \frac{a^2t-2t^2}{a\sqrt[4]{t}}\right) = \frac{d(t^{3/4}-2\,t^{7/4})}{dt} = \frac{3}{4}\,t^{-1/4} - 2\,\frac{7}{4}\,t^{3/4} = \frac{3}{4}\,t^{-1/4} - \frac{7}{2}\,t^{3/4}$

Ahora si $t = 1$, entonces $\frac{d}{dt}\left(\lim\limits_{a\to 1} \frac{a^2t-2t^2}{a\sqrt[4]{t}}\right)\Big|_{t=1} = \frac{3}{4} - \frac{7}{2} = \frac{3-14}{4} = \frac{-11}{4} < 0$ ❑

$d)$ ___V___ Si $w\sqrt{x^2-1} = Arcsec(x)$, entonces $x(x^2-1)\,w' + x^2\,w = 1$

Justificación:

Derivemos con respecto a x la expresión que se menciona en el enunciado:

$w\sqrt{x^2\,-1} = Arcsec(x) \;\Rightarrow\; \left[\sqrt{x^2\,-1}\;w\right]' = \left[Arcsec(x)\right]'$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2\,-1}\right)' w + \sqrt{x^2\,-1}\;(\,w\,)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$\Rightarrow \left((x^2-1)^{1/2}\right)' w + \sqrt{x^2\,-1}\;(\,w\,)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}(x^2-1)'\,w + \sqrt{x^2\,-\,1}\;w' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}(2x)\,w + \sqrt{x^2\,-\,1}\;w' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$\Rightarrow \frac{x\,w}{\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2\,-\,1}\;w' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Ahora si multiplicamos la expresión anterior por $x\sqrt{x^2\,-\,1}$ se obtiene:

$\frac{x\,w\,x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} + x\sqrt{x^2\,-\,1}\sqrt{x^2\,-\,1}\;w' = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow$

$x^2\,w + x(x^2-1)\,w' = 1$ ❑

(40 puntos)