UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 2 CÁLCULO 1

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA — INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 30 MINUTOS FECHA : Lu 01/07/13

(1) Obtenga:

$a)$ $\frac{d^2A}{dP^2}$ si $A(P) = P^2 + \sqrt{3}$

$b)$ y' si $y\,x = x + y$

$c)$ $J'(t)$ si $J(t) = Arctg(t) - cos(t^2)$

$d)$ la pendiente de la recta tangente a la curva $x^2 + y = 1$ en $x_0 = 1$

$e)$ $\left(\frac{1}{x}\right)''$

$f)$ $\frac{dy}{dx}$ si $x\,ln(x) = e^y$

(42 puntos).

<u>Solución:</u>

$a)$ $A(P) = P^2 + \sqrt{3} \Rightarrow \frac{dP}{dA} = 2P \Rightarrow \frac{d^2A}{dP^2} = 2$ ❑

$b)$

$y\,x = x + y \Rightarrow (y\,x)' = (x+y)' \Rightarrow y'\,x + y = 1 + y' \Rightarrow y'\,x - y' = 1 - y \Rightarrow$

$y'(x-1) = 1 - y \Rightarrow y' = \frac{1-y}{x-1}$ ❑

$c)$

$J(t) = Arctg(t) - cos(t^2) \;\Rightarrow J\,'(t) = \frac{1}{1+t^2} - (\,-\,sen(t^2))\,(t^2)\,' \Rightarrow$

$J\,'(t) = \frac{1}{1+t^2} + 2\,t\,sen(t^2)$ ❑

$d)$

$x^2 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x^2 \Rightarrow y\,' = \,-\,2x \Rightarrow y\,'(x_0) = y\,'(1) = \,-\,2(1) = \,-\,2$

Finalmente la pendiente de la recta tangente a la curva $x^2 + y = 1$ en $x_0 = 1$ es $m = \,-\,2$ ❑

$e)$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})\,' = \,-\,x^{-2} \;\Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)'' = (\,-\,x^{-2})\,' = 2\,x^{-3} = \frac{2}{x^3}$ ❑

$f)$

$x\,ln(x) = e^y \;\Rightarrow \Big[x\,ln(x)\Big]' = (e^y)\,' \;\Rightarrow ln(x) + x\frac{1}{x} = e^y\,y\,' \;\Rightarrow$

$ln(x) + 1 = e^y\,y\,' \;\Rightarrow \frac{dy}{dx} \equiv y\,' = \frac{ln(x)+1}{e^y}$ ❑

(2) Muestre que $y(x) = 1 + e^{-x} + x\,e^{-x}$ es solución de la ecuación diferencial $y\,'''+2\,y\,''+\;y\,' = 0$

(09 puntos)

<u>Solución:</u>

$y(x) = 1 + e^{-x} + x\,e^{-x} \Rightarrow y\,'(x) = \,-\,e^{-x} + e^{-x} - x\,e^{-x} = \,-\,x\,e^{-x} \;\Rightarrow$

$y\,''(x) = (\,-\,x\,e^{-x})\,' = \,-\,e^{-x} + x\,e^{-x} \;\Rightarrow$

$$y'''(x) = (-e^{-x} + x\,e^{-x})' = e^{-x} + e^{-x} - x\,e^{-x} = 2\,e^{-x} - x\,e^{-x}$$

Finalmente

$$y''' + 2\,y'' + y' = 2\,e^{-x} - x\,e^{-x} + 2(-e^{-x} + x\,e^{-x}) + (-x\,e^{-x}) =$$

$$2\,e^{-x} - x\,e^{-x} - 2\,e^{-x} + 2\,x\,e^{-x} - x\,e^{-x} = 2\,e^{-x} - 2\,e^{-x} + 2\,x\,e^{-x} - 2\,x\,e^{-x} = 0$$

como se pedía mostrar. $\square$

(3) Calcule el polinomio de Maclaurin de grado 4 para $cosh(x)$.
$Obs.:$ El polinomio de grado 4 para $f(x)$ es
$p(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}\,x^4$

(09 puntos)

Solución:

Recordemos que $f(x) = cosh(x) = \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})$

Luego

$$f(0) = \frac{1}{2}\,(e^0 + e^{-0}) = \frac{1}{2}\,(1+1) = \frac{1}{2}\,(2) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,(e^x - e^{-x}) \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}\,(e^0 - e^{-0}) = \frac{1}{2}\,(1-1) = 0$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x}) \Rightarrow f''(0) = \frac{1}{2}\,(e^0 + e^{-0}) = 1$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{1}{2}\,(e^x - e^{-x}) \Rightarrow f^{(3)}(0) = \frac{1}{2}\,(e^0 - e^{-0}) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x}) \Rightarrow f^{(4)}(0) = \frac{1}{2}\,(e^0 + e^{-0}) = 1$$

Reemplazando en

$$p(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}\,x^4$$

se tiene que el polinomio de Maclaurin de grado 4 para $cosh(x)$ es

$$p(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 \quad \square$$