UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 2 CÁLCULO 1

INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA - INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 2 HORAS 30 MINUTOS FECHA : Mi 09/11/05

(1) Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando TODAS sus respuestas**.

$a)$ __F__ $\lim\limits_{t\to 1} \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt[3]{t}-1} = 0$

Justificación:

Sea $v = \sqrt[6]{t}$. Luego

$$v^2 = t^{\frac{2}{6}} = t^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{t}$$

$$v^3 = t^{\frac{3}{6}} = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{t}$$

Por lo tanto

$$\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt[3]{t}-1} = \frac{v^3-1}{v^2-1} = \frac{(v-1)(v^2+v+1)}{(v-1)(v+1)} = \frac{(v^2+v+1)}{(v+1)} = \frac{(\sqrt[3]{t}+\sqrt[6]{t}+1)}{(\sqrt[6]{t}+1)}$$

$$\therefore \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt[3]{t}-1} = \lim_{t\to 1} \frac{(\sqrt[3]{t}+\sqrt[6]{t}+1)}{(\sqrt[6]{t}+1)} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2} \neq 0 \square$$

$b)$ __F__ La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 1 & , x < -2 \\ \frac{2x+3}{x-5} & , -2 \leq x < 2 \\ x^2 - 4 & , x \geq 2 \end{cases}$ es continua en $\mathbb{R}$

Justificación:

Analicemos la continuidad en $x = -2$.

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2} (x^2 - 3x + 1) = (-2)^2 - 3(-2) + 1 = 4 + 6 + 1 = 11$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{2x+3}{x-5} = \frac{2(-2)+3}{(-2)-5} = \frac{-4+3}{-2-5} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe porque los límites laterales son distintos $(11 \neq \frac{1}{7})$, y de lo anterior concluimos que f no es continua en $x = -2$, es decir, f no es continua en todos los reales.$\square$

$c)$ __F__ La recta tangente a la curva $x^3y^2 - 3xy = x^2$ en $x = 1$ es $y = 3x + 2$

Justificación:

En $x=1$ se tiene, reemplazando en la ecuación de la curva para obtener la coordenada y del punto de tangencia.

$(1)^3y^2-3(1)y=(1)^2 \Rightarrow y^2-3y-1=0 \Rightarrow y=\frac{3\pm\sqrt{9+4}}{2} \Rightarrow y=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2} \Rightarrow$

$$\begin{cases} y_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\approx 3.3 \\ y_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}\approx -0.3 \end{cases}$$

Observamos que la curva posee dos rectas tangentes en el punto $x=1$ y no una como se plantea.❑

$d)$ __F__ $g(t)=\log_3(t)\ e^{t^2} \Rightarrow g''(2)=0$

Justificación:

Sean $P=\log_3(t)$ y $Q=e^{t^2}$, luego $g(t)=P\cdot Q$

$$g'(t)=(P\cdot Q)'=P'\,Q+P\,Q'$$

$$g''(t)=(P'\,Q+P\,Q')'=(P'\,Q)'+(P\,Q')'=P''\,Q+P'\,Q'+P'\,Q'+P\,Q''=$$

$$P''\,Q+2P'\,Q'+P\,Q''$$

Recordemos que : $(log_a\,x)'=\frac{1}{ln(a)\,x}$, luego $P'=(\log_3(t))'=\frac{1}{ln(3)\,t}$

Así

$$P''=\left[\frac{1}{ln(3)\,t}\right]'=\left[\frac{1}{ln(3)}t^{-1}\right]'=-\frac{1}{ln(3)}t^{-2}=-\frac{1}{ln(3)\,t^2}$$

$$Q'=(e^{t^2})'=e^{t^2}(t^2)'=2t\,e^{t^2}$$

$$Q''=(2t\,e^{t^2})'=(2t)'\,e^{t^2}+2t\,(e^{t^2})'=2\,e^{t^2}+2t\,(2t\,e^{t^2})=2\,e^{t^2}+4t^2\ e^{t^2}$$

$$g''(t)=P''\,Q+2P'\,Q'+P\,Q''=-\frac{e^{t^2}}{ln(3)\,t^2}+2\frac{2t\,e^{t^2}}{ln(3)\,t}+\log_3(t)\,(2\,e^{t^2}+4t^2\ e^{t^2})$$

$$\therefore\ g''(2)=-\frac{e^{2^2}}{ln(3)\,2^2}+2\frac{2(2)\,e^{2^2}}{ln(3)\,2}+\log_3(2)\,(2\,e^{2^2}+4(2)^2\ e^{2^2})=$$

$$-\frac{e^4}{4\,ln(3)}+\frac{4\,e^4}{ln(3)}+\log_3(2)\,(2\,e^4+16\ e^4)=\frac{15e^4}{4\,ln(3)}+18\,e^4\log_3(2)\ =$$

$186.37+620.06=806.43\neq 0$❑

$e)$ __F__ La función posición de una partícula está dada por $s(t)=3t^3-4t^2+0.1t$, $t\geq 0$. La partícula alcanza una velocidad de $4\,m/s$ a los $6\,s$.

Justificación:

$v(t) = s'(t) = 9t^2 - 8t + 0.1 = 4 \Rightarrow 9t^2 - 8t - 3.9 = 0 \Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{64+4(9)(3.9)}}{18}$

$\Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{64+140.4}}{18} \Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{204.4}}{18} \Rightarrow \begin{cases} t_1 \approx 1.24 \\ t_2 \approx -0.35 \end{cases}$

Esto significa que la partícula alcanza la velocidad de $4\, m/s$ para $t = 1.24\, s. \neq 6\, s$. (Note que $t = -0.35$ no puede ser considerado porque $t \geq 0$)

Otra forma de justificar lo anterior es calcular la velocidad a los $6\, s$.

$v(6) = 9(6)^2 - 8(6) + 0.1 = 324 - 48 + 0.1 = 276.1\, m/s \neq 4\, m/s$ ❑

$f)$ __F__ La serie de Maclaurin de orden 5 de $f(x) = x\, e^{-x}$ es $x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5$.

Justificación:

$f(x) = x\, e^{-x} \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = e^{-x} - x\, e^{-x} \Rightarrow f'(0) = e^{-0} - 0\, e^{-0} = 1$

$f''(x) = -e^{-x} - (e^{-x} - x\, e^{-x}) = -e^{-x} - e^{-x} + x\, e^{-x} = -2\, e^{-x} + x\, e^{-x} \Rightarrow$

$f''(0) = -2\, e^{-0} + 0\, e^{-0} = -2$

$f^{(3)}(x) = (-2\, e^{-x} + x\, e^{-x})' = 2\, e^{-x} + e^{-x} - x\, e^{-x} = 3\, e^{-x} - x\, e^{-x} \Rightarrow$

$f^{(3)}(0) = 3\, e^{-0} - 0\, e^{-0} = 3$

$f^{(4)}(x) = (3\, e^{-x} - x\, e^{-x})' = -3\, e^{-x} - e^{-x} + x\, e^{-x} = -4\, e^{-x} + x\, e^{-x} \Rightarrow$

$f^{(4)}(0) = -4\, e^{-0} + 0\, e^{-0} = -4$

$f^{(5)}(x) = (-4\, e^{-x} + x\, e^{-x})' = 4\, e^{-x} + e^{-x} - x\, e^{-x} = 5\, e^{-x} - x\, e^{-x} \Rightarrow$

$f^{(5)}(0) = 5\, e^{-0} - 0\, e^{-0} = 5$

$\therefore\ f(x) = x\, e^{-x} \approx$

$f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2}\, x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\, x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\, x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}\, x^5 =$

$0 + x - \frac{2}{2}\, x^2 + \frac{3}{3!}\, x^3 - \frac{4}{4!}\, x^4 + \frac{5}{5!}\, x^5 =$

$x - x^2 + \frac{1}{2}\, x^3 - \frac{1}{6}\, x^4 + \frac{1}{24}\, x^5 \neq x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5$ ❑

(30 puntos).

(2) Verifique el siguiente resultado :

$\int \frac{x^3-3x+1}{x^2+3}\,dx = \frac{x^2}{2} - 3\,ln(x^2+3) + \frac{\sqrt{3}}{3}\,Arctg(\frac{\sqrt{3}}{3}\,x) + c\,,$ c constante real.

(10 puntos)

Solución:

$$\left[\frac{x^2}{2} - 3\,ln(x^2+3) + \frac{\sqrt{3}}{3}\,Arctg(\frac{\sqrt{3}}{3}\,x) + c\right]' =$$

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' - 3\,(\,ln(x^2+3))' + \frac{\sqrt{3}}{3}\,\left(Arctg(\frac{\sqrt{3}}{3}\,x)\right)' + c' =$$

$$x - 3\,\frac{1}{x^2+3}\,(x^2+3)' + \frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+(\frac{\sqrt{3}}{3}\,x)^2} + 0 =$$

$$x - 3\,\frac{2x}{x^2+3} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{1}{3}\,x^2} = x - \frac{6x}{x^2+3} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{\frac{3+x^2}{3}} = x - \frac{6x}{x^2+3} + \frac{1}{3}\,\frac{3}{x^2+3} =$$

$$x - \frac{6x}{x^2+3} + \frac{1}{x^2+3} = \frac{x(x^2+3)-6x+1}{x^2+3} = \frac{x^3+3x-6x+1}{x^2+3} = \frac{x^3-3x+1}{x^2+3}\,\square$$

(3) Calcule las siguientes derivadas :

$a)$ $\frac{dy}{dx}$ para $y = 2^{1/x} - x^x\,e^{e^x} + ln(x\,cos(1-x)) - Arccos(\sqrt{x}\,)$

$b)$ $\frac{d^2y}{dx^2}$ para $xy = 1$

(10 puntos)

Solución:

$a)$ Sean $A = 2^{1/x}$, $B = x^x$, $C = e^{e^x}$, $D = ln(x\,cos(1-x))$, $E = Arccos(\sqrt{x}\,)$
Luego
$y = A - B\,C + D - E \Rightarrow y' = (A - B\,C + D - E)' = A' - (BC)' + D' - E'$

Recordemos que :
$(a^{f(x)})' = a^{f(x)}\,ln(a)\,f'(x) \Rightarrow A' = (2^{1/x})' = 2^{1/x}\,ln(2)\,(1/x)' =$

$$2^{1/x}\,ln(2)\,(x^{-1})' = 2^{1/x}\,ln(2)\,(\,-x^{-2}) = -\,\frac{2^{1/x}\,ln(2)}{x^2}$$

$$B' = (x^x)' = x^x(ln(x)+1)$$

$$C' = (e^{e^x})' = e^{e^x}\,(e^x)' = e^{e^x}\,e^x$$

$$D' = (ln(x\,cos(1-x)))' = \frac{1}{x\,cos(1-x)}\,(x\,cos(1-x))' =$$

$$\frac{1}{x\,cos(1-x)}\,(cos(1-x) + x\,(\,-sen(1-x))\,(1-x)') =$$

$\frac{cos(1-x)+x\ sen(1-x)}{x\,cos(1-x)}$

$E' = (Arccos(\sqrt{x}\,))' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x}\,)^2}}(\sqrt{x}\,)' = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

$\therefore\ y' = A' - (BC)' + D' - E' = A' - B'\,C - B\,C' + D' - E' =$

$-\frac{2^{1/x}\,ln(2)}{x^2} - x^x(ln(x)+1)\,e^{e^x} - x^x\,e^{e^x}\,e^x +$

$\frac{cos(1-x)+x\ sen(1-x)}{x\,cos(1-x)} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ ❑

$b)\ xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = x^{-1}$

$y' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$y'' = (-x^{-2})' = 2\,x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$ ❑

(4) $a)$ La fórmula de interés compuesto es $A = P\,(1+\frac{r}{n})^{n\,t}$. Calcule la tasa de cambio de A con respecto a t, sabiendo que P, r y n son constantes.
$b)$ La ecuación logística $P(t) = \frac{a}{1+b\,e^{-k\,t}}$ describe el crecimiento poblacional limitado, donde a, b y k son constantes reales. Calcule $P''(t)$ y $P'(10)$.

(10 puntos)

Solución:

$a)\ A = P\,(1+\frac{r}{n})^{n\,t} \Rightarrow ln(A) = P\,(nt)\,ln\,(1+\frac{r}{n}) \Rightarrow \frac{1}{A}\,A' = P\ n\ ln\,(1+\frac{r}{n}) \Rightarrow$

$A' = P\,n\ ln\,(1+\frac{r}{n})\,A \Rightarrow A' = P\,n\ ln\,(1+\frac{r}{n})\,P\,(1+\frac{r}{n})^{n\,t} \Rightarrow$

$A' = P^2\,n\,ln\,(1+\frac{r}{n})\ (1+\frac{r}{n})^{n\,t}$ ❑

$b)\ P(t) = \frac{a}{1+b\,e^{-k\,t}} = a\,(1+b\,e^{-k\,t})^{-1} \Rightarrow$

$P'(t) = -a\,(1+b\,e^{-k\,t})^{-2}\,(1+b\,e^{-k\,t})' \Rightarrow$

$P'(t) = -a\,(1+b\,e^{-k\,t})^{-2}\,(-k\,b\,e^{-k\,t}) \Rightarrow P'(t) = \frac{k\,a\,b\,e^{-k\,t}}{(1+b\,e^{-k\,t})^2}$

$P'(10) = \frac{k\,a\,b\,e^{-10\,k}}{(1+b\,e^{-10\,k})^2}$

$$P''(t) = \left[\frac{k\,a\,b\,e^{-k\,t}}{(1+b\,e^{-k\,t})^2} \right]' = \frac{(k\,a\,b\,e^{-k\,t})'(1+b\,e^{-k\,t})^2 - (k\,a\,b\,e^{-k\,t})\left[(1+b\,e^{-k\,t})^2\right]'}{(1+b\,e^{-k\,t})^4} =$$

$$\frac{(-k^2\,a\,b\,e^{-k\,t})(1+b\,e^{-k\,t})^2 - (k\,a\,b\,e^{-k\,t})\left[2\,(1+b\,e^{-k\,t})\,(-\,k\,b\,e^{-k\,t})\right]}{(1+b\,e^{-k\,t})^4} =$$

$$\frac{(-k^2\,a\,b\,e^{-k\,t})(1+b\,e^{-k\,t})^2 + 2\,(k^2\,a\,b^2\,e^{-2\,k\,t})(1+b\,e^{-k\,t})}{(1+b\,e^{-k\,t})^4} =$$

$$\frac{(1+b\,e^{-k\,t})\left[(-k^2\,a\,b\,e^{-k\,t})(1+b\,e^{-k\,t}) + 2\,(k^2\,a\,b^2\,e^{-2\,k\,t})\right]}{(1+b\,e^{-k\,t})^4} =$$

$$\frac{-k^2\,a\,b\,e^{-k\,t} - k^2\,a\,b^2\,e^{-2\,k\,t} + 2\,k^2\,a\,b^2\,e^{-2\,k\,t}}{(1+b\,e^{-k\,t})^3} = \frac{-k^2\,a\,b\,e^{-k\,t} + k^2\,a\,b^2\,e^{-2\,k\,t}}{(1+b\,e^{-k\,t})^3} =$$

$$\frac{k^2\,a\,b\,e^{-k\,t}(\,-1+\,b\,e^{-k\,t})}{(1+b\,e^{-k\,t})^3} \square$$