UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 1 CÁLCULO 1

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA — INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Lu 01/04/13

(1) Obtenga la distancia entre los puntos de intersección de las curvas $3x^2 - 2y^2 + 4y - 3x = 3$ y $2x + 4y = 4$.

(15 puntos).

Solución:

De $2x + 4y = 4$ se tiene que $x = \frac{4-4y}{2} = 2 - 2y$

Reemplazando lo anterior en $3x^2 - 2y^2 + 4y - 3x = 3$ se tiene que:

$$3x^2 - 2y^2 + 4y - 3x = 3 \Rightarrow 3(2-2y)^2 - 2y^2 + 4y - 3(2-2y) = 3 \Rightarrow$$

$$3(4 - 8y + 4y^2) - 2y^2 + 4y - 6 + 6y - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$12 - 24y + 12y^2 - 2y^2 + 4y - 6 + 6y - 3 = 0 \Rightarrow 10y^2 - 14y + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{14 \pm \sqrt{196-120}}{20} \Rightarrow y = \frac{14 \pm \sqrt{76}}{20} \Rightarrow y = \frac{7 \pm \sqrt{19}}{10} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{7+\sqrt{19}}{10} \approx 1.14 \\ y_2 = \frac{7-\sqrt{19}}{10} \approx 0.26 \end{cases}$$

Calculemos ahora las coordenadas x correspondientes.

$$x_1 = 2 - 2y_1 = 2 - \frac{7}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5} = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5} \approx -0.27$$

$$x_2 = 2 - 2y_1 = 2 - \frac{7}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5} = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5} \approx 1.47$$

Finalmente, la distancia entre los puntos de intersección $P_1 = (x_1, y_1) = \left(\frac{3}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5} \;;\; \frac{7+\sqrt{19}}{10}\right)$ y $P_2 = (x_2, y_2) = \left(\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5} \;;\; \frac{7-\sqrt{19}}{10}\right)$ es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{19}}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{19}}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{76}{25} + \frac{19}{25}} = \sqrt{\frac{95}{25}} \approx 1.95 \quad \square$$

(2) Dadas las curvas

$a)$ $x^2 - 3y + 1 = x$

$b)$ $3x^2 + 3y^2 - 2y - 10 = 0$

$c)$ $-y^2 + y + 2x^2 - 4x = 3$

$i)$ Escriba las ecuaciones anteriores en forma canónica y luego grafique cada una de las curvas por separado.

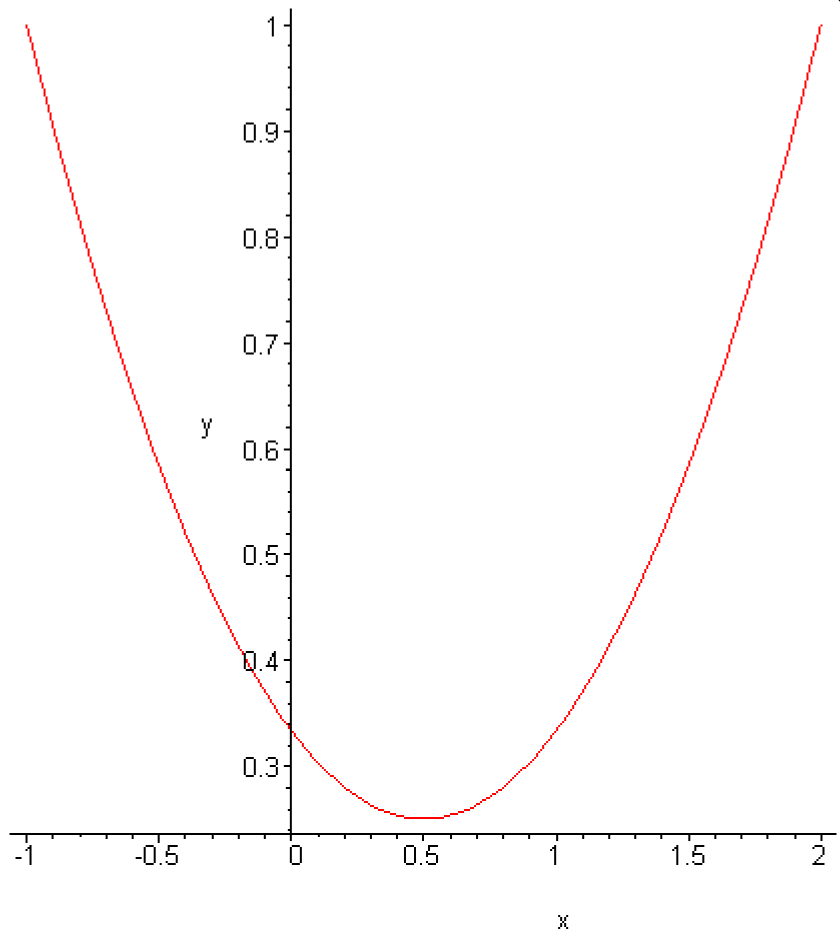
$ii)$ Obtenga los puntos de intersección de las curvas con los ejes coordenados.

(20 puntos)

Solución:

$a)$ $i)$ $x^2 - 3y + 1 = x \Rightarrow (x^2 - x) = 3y - 1 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 3y - 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow$
$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 3y - \frac{3}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 3\left(y - \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(y - \frac{1}{4}\right)$

Grafiquemos notando que el vértice de la parábola es $V = \left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{4}\right)$



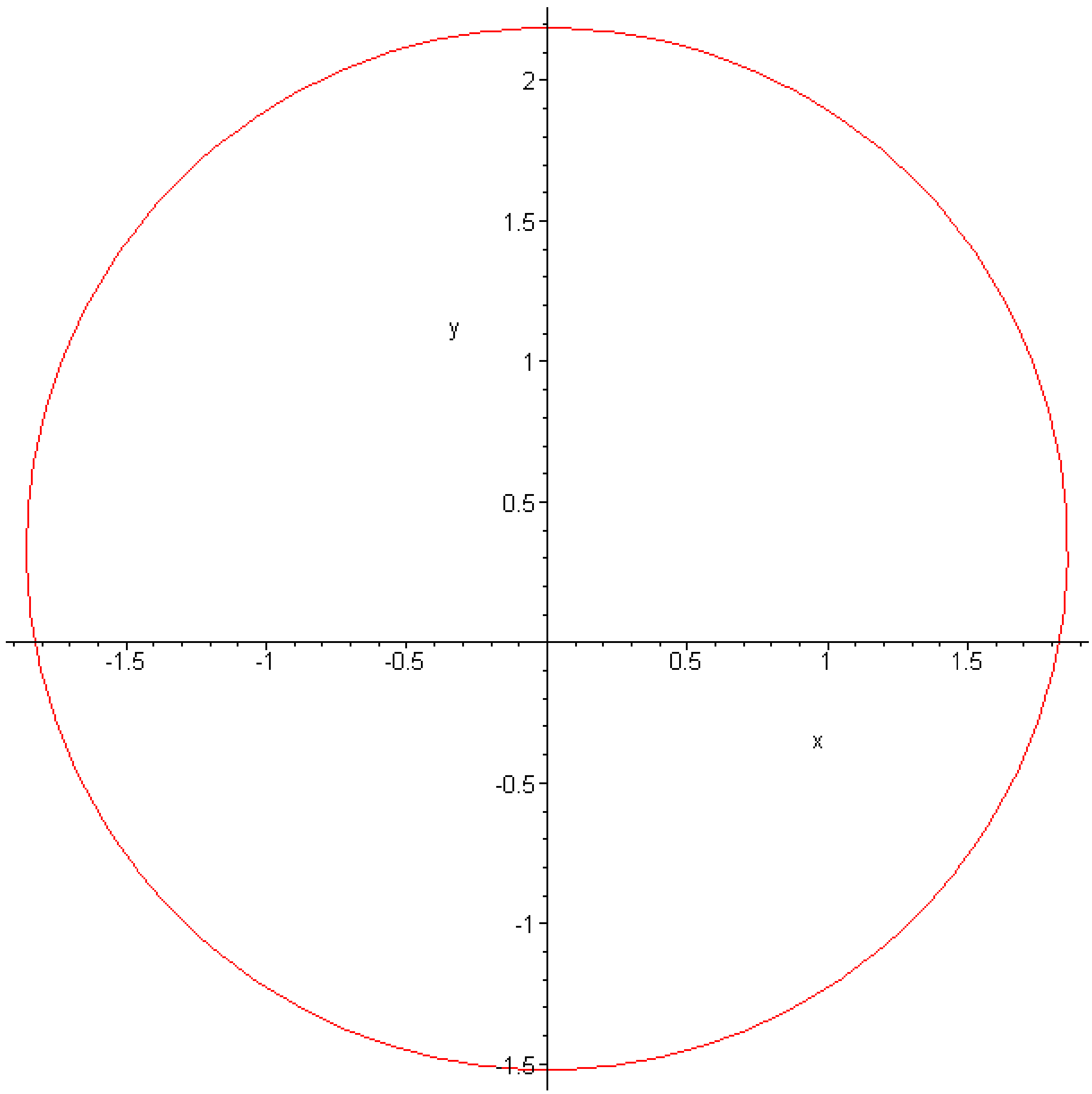
$ii)$ Eje $x:$ $y = 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \in \mathbb{C}$

Esto significa que no existen intersecciones con el eje x.

Eje $y:\ x=0 \Rightarrow\ -3y+1=0 \Rightarrow y=\frac{1}{3}\approx 0.33 \Rightarrow P=\left(0\,;\ \frac{1}{3}\right)$ ❑

$b)\ i)\ 3x^2+3y^2-2y-10=0 \Rightarrow 3x^2+(3y^2-2y)=10 \Rightarrow$
$3\,x^2+3\,(y^2-\frac{2}{3}\,y)=10 \Rightarrow x^2+(y^2-\frac{2}{3}\,y)=\frac{10}{3} \Rightarrow$
$x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10}{3}+\frac{1}{9} \Rightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{31}{9}}\right)^2$

Notemos que la circunferencia anterior posee centro en $\left(0\,;\ \frac{1}{3}\right)$ y radio $r=\sqrt{\frac{31}{9}}\approx 1.86$



$ii)$ Eje x :

$y = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{10}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{10}{3}} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{10}{3}} \approx 1.83 \\ x_2 = -\sqrt{\frac{10}{3}} \approx -1.83 \end{cases}$$

Los puntos de intersección con el eje x son: $P_1 = \left(\sqrt{\frac{10}{3}}\ ;\ 0\right)$ y $P_2 = \left(-\sqrt{\frac{10}{3}}\ ;\ 0\right)$

Eje y :

$x = 0 \Rightarrow 3y^2 - 2y - 10 = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4+120}}{6} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1+\sqrt{31}}{3} \approx 2.19 \\ y_2 = \frac{1-\sqrt{31}}{3} \approx 1 - 1.52 \end{cases}$

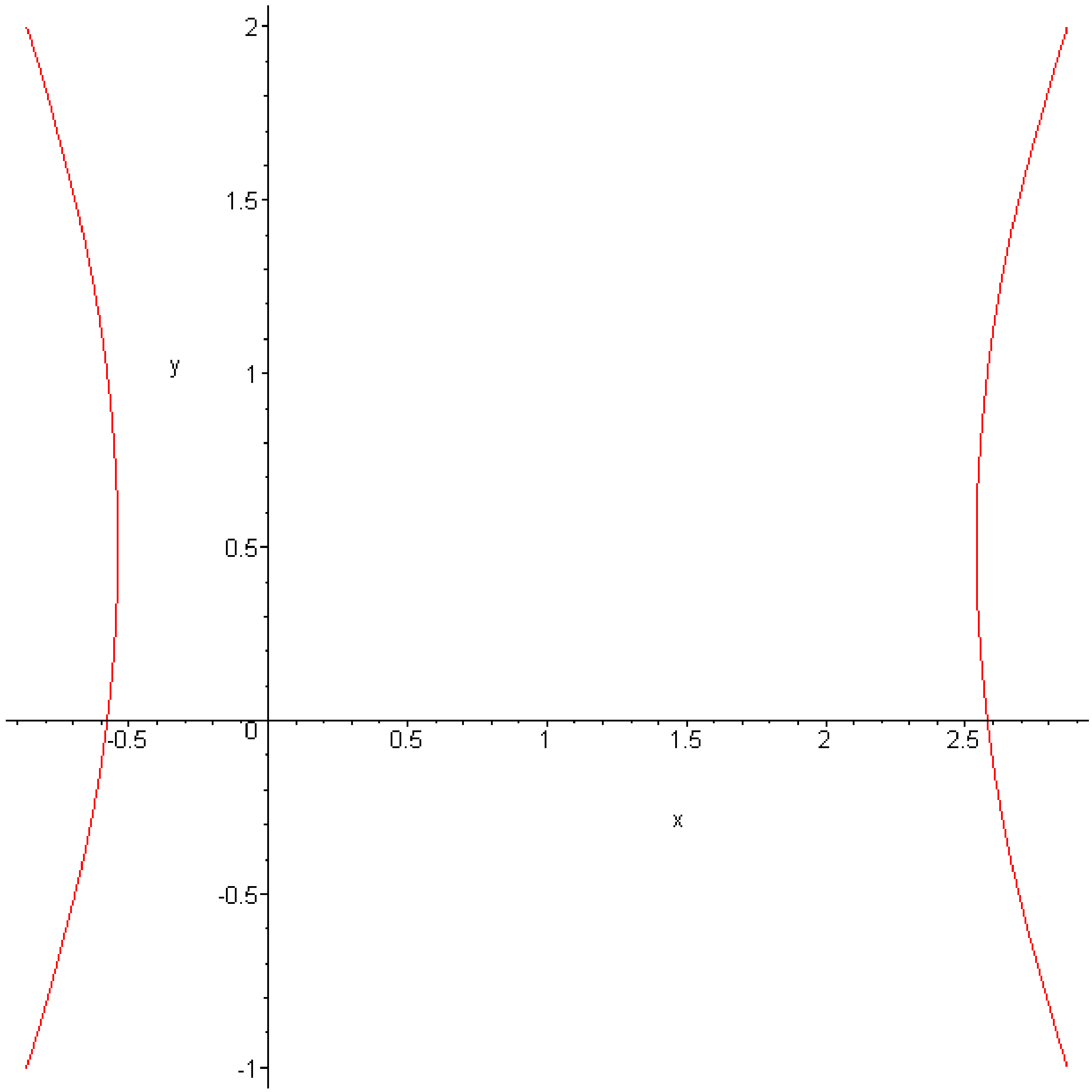
Los puntos de intersección con el eje y son: $P_1 = \left(0\ ;\ \frac{1+\sqrt{31}}{3}\right)$ y $P_2 = \left(0\ ;\ \frac{1-\sqrt{31}}{3}\right)$ ❑

$c)\ i)\ -y^2 + y + 2x^2 - 4x = 3 \Rightarrow (2x^2 - 4x) - (y^2 - y) = 3 \Rightarrow$

$2(x^2 - 2x) - (y^2 - y) = 3 \Rightarrow 2(x-1)^2 - (y - \frac{1}{2})^2 = 3 + 2 - \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{2}} - (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{19}{4} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{\frac{19}{8}} - \frac{(y-\frac{1}{2})^2}{\frac{19}{4}} = 1$

Notemos que la hipérbola tiene centro $C = \left(1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$



$ii)$ Eje x :

$$y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+24}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2+\sqrt{10}}{2} \approx 2.58 \\ x_2 = \frac{2-\sqrt{10}}{2} \approx -0.58 \end{cases}$$

Los puntos de intersección con el eje x son: $P_1 = \left(\frac{2+\sqrt{10}}{2}\ ;\ 0\right)$ y $P_2 = \left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}\ ;\ 0\right)$

Eje y :

$x=0 \Rightarrow -y^2+y-3=0 \Rightarrow y^2-y+3=0 \Rightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{1-12}}{2} \in \mathbb{C}$

Lo anterior significa que no existen puntos de intersección con el eje y. ❑

(3) Las tres rectas $x=0$, $y=0$ y $3x+4y=1$ forman un triángulo. Encuentre la ecuación de la circunferencia inscrita, indicando el centro y el radio de ella.

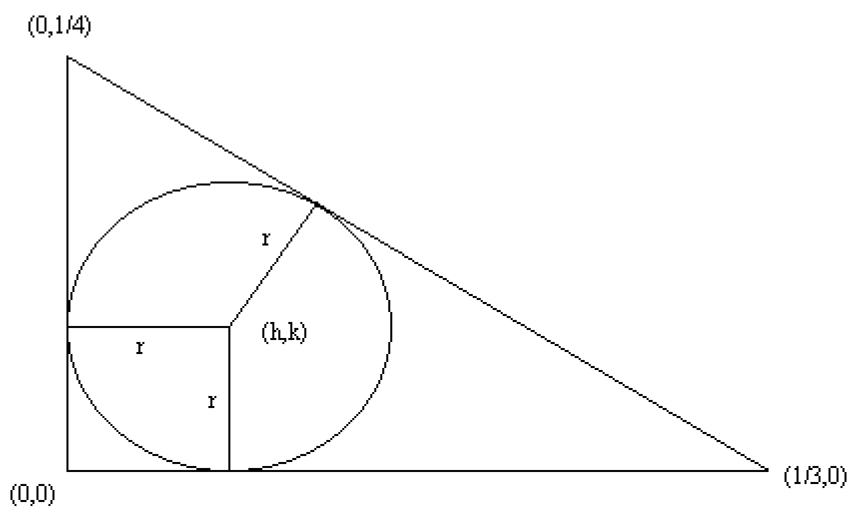
(15 puntos)

Solución:

Observemos que :

$3x+4y=1 \Rightarrow^{x=0} 4y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{4}$

$3x+4y=1 \Rightarrow^{y=0} 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$



Si (h,k) representan las coordenadas del centro de la circunferencia inscrita, entonces

$h=k=r \qquad (1)$

Ahora,

$d((h,k)\,;\,L:3x+4y-1=0)=\frac{|\,3h+4k-1\,|}{\sqrt{3^2+4^2}}=r \Rightarrow |\,3h+4k-1\,|=5r \Rightarrow$

$3h + 4k - 1 = \pm 5r \qquad\qquad (2)$

Reemplazando (1) en (2) :

$$3r + 4r - 1 = \pm 5r \Rightarrow \begin{cases} 3r + 4r - 1 = 5r \\ 3r + 4r - 1 = -5r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2r = 1 \\ \vee \\ 12r = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ \vee \\ r = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Se ve que $r = \frac{1}{2} = 0.5$ no es un valor admisible (Observe la figura).

Por lo tanto, $r = \frac{1}{12}$

Así, $h = k = r = \frac{1}{12}$

$\therefore$ la ecuación de la circunferencia inscrita es

$$(x - \tfrac{1}{12})^2 + (y - \tfrac{1}{12})^2 = (\tfrac{1}{12})^2 \quad \square$$

(4) Encuentre la ecuación de la recta que es paralela a la recta $L: 2x + 3y = 1$ y que pasa por el punto $P(-1, 1)$.

(10 puntos)

Solución:

Sabemos que la recta que buscamos es paralela a $2x + 3y = 1$, es decir, ambas poseen la misma pendiente.

Determinemos la pendiente de la recta de ecuación $2x + 3y = 1$

$$2x + 3y = 1 \Rightarrow 3y = 1 - 2x \Rightarrow y = \frac{1-2x}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x$$

De lo anterior observamos que la pendiente de la recta dada es $m_1 = -\frac{2}{3}$, luego la pendiente de la recta buscada es $m_2 = -\frac{2}{3}$

Además sabemos que la recta buscada pasa por el punto $P(-1, 1)$, por lo tanto la ecuación de la recta es

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x + 1) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \quad \square$$