

PAUTA PRUEBA N° 1 CÁLCULO 1
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA - INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL

NOMBRE : _____ **PTOS. :** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 50 MINUTOS **FECHA : Ma 18/10/05**

(1) Responda Verdadero (V) o Falso (F), justificando TODAS sus respuestas.

a) F La ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección de las curvas $3x^2 - 2y^2 + 4y - 6x = 3$ y $2x - 2y = 1$ es $4x - 2y = 1$.

Justificación:

Si existieran dos puntos de intersección entre la curva $3x^2 - 2y^2 + 4y - 6x = 3$ y la recta $2x - 2y = 1$, entonces la recta que pasaría por esos puntos es $2x - 2y = 1$, es decir, la misma recta.

Con la explicación anterior basta para mostrar que el enunciado es falso, porque presupone la existencia de puntos de intersección.

Calculemos, de todos modos, los puntos de intersección, si es que existen.

De $2x - 2y = 1$, se tiene $x = \frac{1+2y}{2}$. Reemplazando en la ecuación de la curva $3x^2 - 2y^2 + 4y - 6x = 3$ se tiene

$$3x^2 - 2y^2 + 4y - 6x = 3 \Rightarrow 3x^2 - 2y^2 + 4y - 6x = 3 \Rightarrow$$

$$3\left(\frac{1+2y}{2}\right)^2 - 2y^2 + 4y - 6\left(\frac{1+2y}{2}\right) = 3 \Rightarrow$$

$$3\left(\frac{1+4y+4y^2}{4}\right) - 2y^2 + 4y - 3(1+2y) - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4} + 3y + 3y^2 - 2y^2 + 4y - 3 - 6y - 3 = \Rightarrow y^2 + y - \frac{21}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+21}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{-1 + \sqrt{22}}{2} \approx 1.845 \\ y_2 = \frac{-1 - \sqrt{22}}{2} \approx -2.845 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1+2y_1}{2} = \frac{1+2\frac{-1+\sqrt{22}}{2}}{2} = \frac{1-1+\sqrt{22}}{2} = \frac{\sqrt{22}}{2} \approx 2.345$$

$$x_2 = \frac{1+2y_2}{2} = \frac{1+2\frac{-1-\sqrt{22}}{2}}{2} = \frac{1-1-\sqrt{22}}{2} = -\frac{\sqrt{22}}{2} \approx -2.345$$

Los puntos de intersección son $P_1(x_1, y_1) = \left(\frac{\sqrt{22}}{2}, \frac{-1+\sqrt{22}}{2}\right)$ y $P_2(x_2, y_2) = \left(-\frac{\sqrt{22}}{2}, \frac{-1-\sqrt{22}}{2}\right)$

La recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 es

$$y + \left(\frac{1+\sqrt{22}}{2}\right) = \frac{\frac{-1-\sqrt{22}}{2} - \frac{-1+\sqrt{22}}{2}}{-\frac{\sqrt{22}}{2} - \frac{\sqrt{22}}{2}} \left(x + \frac{\sqrt{22}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$y + \left(\frac{1+\sqrt{22}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{22}}{-\sqrt{22}} \left(x + \frac{\sqrt{22}}{2}\right) \Rightarrow y = x + \frac{\sqrt{22}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{22}}{2} \Rightarrow$$

$$y = x - \frac{1}{2} \Rightarrow 2y - 2x = -1 \Rightarrow 2y - 2x = 1 \star$$

b) V Las rectas $-3y - a = 2(x+1)$ y $3x - 2y = a$ son perpendiculares, no importando el valor de $a \in \mathbb{R}$.

Justificación:

Sea $L_1 : -3y - a = 2(x+1)$

$$-3y - a = 2(x+1) \Rightarrow -3y = 2x + 2 + a \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} - \frac{a}{3} \Rightarrow m_1 = -\frac{2}{3}$$

Sea $L_2 : 3x - 2y = a$

$$3x - 2y = a \Rightarrow 2y = 3x - a \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{a}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{3}{2}$$

Luego $m_1 \cdot m_2 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$, y las rectas son perpendiculares no importando el valor de a . $\star$

c) F El conjunto solución de $\left|\frac{x^2+2}{x-4}\right| < 3$ es $S =]-5, 1[$

Justificación:

$$\left|\frac{x^2+2}{x-4}\right| < 3 \Rightarrow -3 < \frac{x^2+2}{x-4} < 3 \Rightarrow -3 < \frac{x^2+2}{x-4} \wedge \frac{x^2+2}{x-4} < 3 \Rightarrow$$

Resolvamos en primer lugar $-3 < \frac{x^2+2}{x-4}$

$$-3 < \frac{x^2+2}{x-4} \Rightarrow 0 < \frac{x^2+2}{x-4} + 3 \Rightarrow 0 < \frac{x^2+2+3x-12}{x-4} \Rightarrow 0 < \frac{x^2+3x-10}{x-4} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2+3x-10}{x-4} > 0$$

Obtengamos puntos críticos.

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = -\frac{10}{2} = -5 \end{cases}$$

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

La tabla asociada es

	$x < -5$	$x = -5$	$-5 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$x^2 + 3x - 10$	+	0	-	0	+	18	+
$x - 4$	-	-9	-	-2	-	0	+
$\frac{x^2+3x-10}{x-4}$	-	0	+	0	-	<i>indet.</i>	+

$$\therefore S_1 = (-5, 2) \cup (4, +\infty)$$

Resolvamos en segundo lugar $\frac{x^2+2}{x-4} < 3$

$$\frac{x^2+2}{x-4} < 3 \Rightarrow \frac{x^2+2}{x-4} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{x^2+2-3x+12}{x-4} < 0 \Rightarrow \frac{x^2-3x+14}{x-4} < 0$$

Obtengamos puntos críticos.

$$x^2 - 3x + 14 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-56}}{2} \in \mathbb{C}$$

La expresión $x^2 - 3x + 14$ es siempre positiva o siempre negativa. probemos con un valor de x , por ejemplo para $x = 0$, se tiene que $x^2 - 3x + 14 = 14 > 0$, luego siempre es positiva.

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

La tabla asociada es

	$x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$x^2 - 3x + 14$	+	18	+
$x - 4$	-	0	+
$\frac{x^2-3x+14}{x-4}$	-	<i>indet.</i>	+

$$\therefore S_2 = (-\infty, 4)$$

La solución final S_f es

$$S_f = S_1 \cap S_2 = (-5, 2) \cup (4, +\infty) \cap (-\infty, 4) = (-5, 2) \neq]-5, 1 [\star$$

d) F No existe una circunferencia con centro en $(1, -2)$ y que sea tangente a la recta $3x - 2y = -1$

Justificación:

Notemos que la distancia del centro a la recta tangente es igual al radio de la circunferencia que buscamos.

$$r = d((1, -2), 3x - 2y + 1 = 0) = \frac{|3(1) - 2(-2) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|3+4+1|}{\sqrt{9+4}} = \frac{8}{\sqrt{13}}$$

Luego, concluimos que la circunferencia existe y tiene ecuación

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{64}{13} \star$$

e) F La distancia entre los puntos de intersección de las curvas $y - 2x^2 = \frac{1}{2}$ y $2x^2 + 3y^2 = 4$ es 5.

Justificación:

Calculemos los puntos de intersección.

$$y - 2x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 = y - \frac{1}{2}$$

Reemplazando la expresión anterior en $2x^2 + 3y^2 = 4$ obtenemos

$$2x^2 + 3y^2 = 4 \Rightarrow y - \frac{1}{2} + 3y^2 = 4 \Rightarrow 3y^2 + y - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+54}}{6} \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{55}}{6} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{-1 + \sqrt{55}}{6} \approx 1.07 \\ y_2 = \frac{-1 - \sqrt{55}}{6} \approx -1.40 \end{cases}$$

Reemplazando y_1 en $2x^2 = y - \frac{1}{2}$

$$2x_1^2 = y_1 - \frac{1}{2} \Rightarrow 2x_1^2 = \frac{-1 + \sqrt{55}}{6} - \frac{1}{2} \Rightarrow 2x_1^2 = \frac{\sqrt{55}}{6} - \frac{2}{3} \Rightarrow x_1^2 = \frac{\sqrt{55}}{12} - \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$x_{11} = \sqrt{\frac{\sqrt{55}}{12} - \frac{1}{3}} \approx 0.53$$

$$x_{12} = -\sqrt{\frac{\sqrt{55}}{12} - \frac{1}{3}} \approx -0.53$$

Reemplazando y_2 en $2x^2 = y - \frac{1}{2}$

$$2x_2^2 = y_2 - \frac{1}{2} \Rightarrow 2x_2^2 = \frac{-1 - \sqrt{55}}{6} - \frac{1}{2} \Rightarrow 2x_2^2 = -\frac{\sqrt{55}}{6} - \frac{2}{3} \Rightarrow x_2^2 = -\frac{\sqrt{55}}{12} - \frac{1}{3}$$

Pero un número al cuadrado no puede ser igual a un número negativo, luego no existen más raíces.

Los puntos de intersección son

$$P_1 = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{55}}{12} - \frac{1}{3}}, \frac{-1 + \sqrt{55}}{6} \right) = (a, b),$$

$$P_2 = \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{55}}{12} - \frac{1}{3}}, \frac{-1 + \sqrt{55}}{6} \right) = (-a, b)$$

la distancia entre ellos es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(a + a)^2 + (b - b)^2} = \sqrt{(2a)^2 + (0)^2} = \sqrt{(2a)^2} = 2a =$$

$$2\sqrt{\frac{\sqrt{55}}{12} - \frac{1}{3}} \approx 1.06 \neq 5 \star$$

f) F La inecuación $\frac{3x-2}{x^2+1} > -1$ no tiene soluciones reales.

Justificación:

Contraejemplo: $x = 1 \in \mathbb{R}$ $\frac{3x-2}{x^2+1} = \frac{3(1)-2}{(1)^2+1} = \frac{3-2}{1+1} = \frac{1}{2} > -1$

Obs. : La solución es $S = (-\infty, \frac{-3-\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, +\infty)$ ★

(30 puntos).

(2) Dadas las curvas

a) $x^2 - 3y + 1 = x - y$

b) $6x^2 + 6y^2 - 3y - 10 = 0$

c) $-2y^2 + y + 4x^2 - 7x = 6$

i) Grafique todas las curvas en un mismo gráfico.

ii) Obtenga los puntos de intersección de las curvas a) y c) con los ejes coordenados.

(20 puntos)

Solución:

$$a) x^2 - 3y + 1 = x - y \Rightarrow (x^2 - x) = 3y - y - 1 \Rightarrow (x^2 - x) = 2y - 1 \Rightarrow$$

$$(x^2 - x + \frac{1}{4}) = 2y - 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = 2y - \frac{3}{4} \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = 2(y - \frac{3}{8})$$

Es una parábola con vértice en $(h, k) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{8})$

$$b) 6x^2 + 6y^2 - 3y - 10 = 0 \Rightarrow 6x^2 + (6y^2 - 3y) = 10 \Rightarrow$$

$$6x^2 + 6(y^2 - \frac{1}{2}y) = 10 \Rightarrow x^2 + (y^2 - \frac{1}{2}y) = \frac{10}{6} \Rightarrow$$

$$x^2 + (y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}) = \frac{5}{3} + \frac{1}{16} \Rightarrow x^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = \frac{83}{48}$$

Es una circunferencia con centro $(h, k) = (0, \frac{1}{4})$ y radio $r = \sqrt{\frac{83}{48}} \approx 1.31$

$$c) -2y^2 + y + 4x^2 - 7x = 6 \Rightarrow (-2y^2 + y) + (4x^2 - 7x) = 6 \Rightarrow$$

$$-2(y^2 - \frac{1}{2}y) + 4(x^2 - \frac{7}{4}x) = 6 \Rightarrow -(y^2 - \frac{1}{2}y) + 2(x^2 - \frac{7}{4}x) = 3 \Rightarrow$$

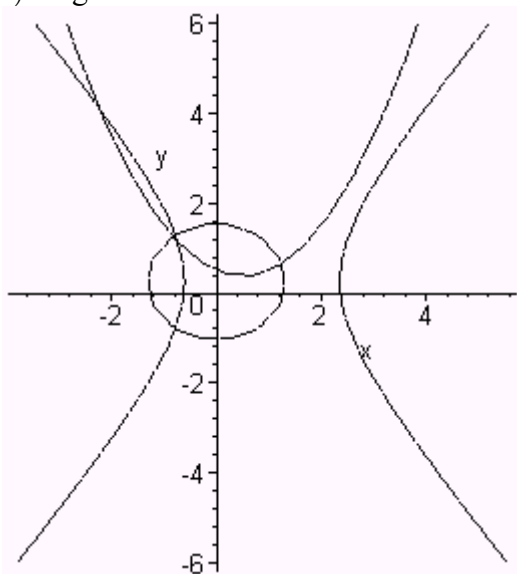
$$-(y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}) + 2(x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{49}{64}) = 3 - \frac{1}{16} + \frac{49}{32} \Rightarrow$$

$$-(y - \frac{1}{4})^2 + 2(x - \frac{7}{8})^2 = \frac{143}{32} \Rightarrow \frac{(x - \frac{7}{8})^2}{\frac{1}{2}} - (y - \frac{1}{4})^2 = \frac{143}{32} \Rightarrow$$

$$\frac{(x - \frac{7}{8})^2}{\frac{143}{64}} - \frac{(y - \frac{1}{4})^2}{\frac{143}{32}} = 1$$

Es una hipérbola con centro $(h, k) = (\frac{7}{8}, \frac{1}{4})$, $a^2 = \frac{143}{64} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{143}}{8} \approx 1.49$

i) La gráfica es



ii) Calculemos los puntos de intersección de la curva $x^2 - 3y + 1 = x - y$ con los ejes coordenados.

* Intersecciones con el eje x : Hacemos $y = 0$.

$$x^2 - 3(0) + 1 = x - (0) \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \in \mathbb{C}$$

Esto significa que la parábola no interseca al eje horizontal.

* Intersecciones con el eje y : Hacemos $x = 0$.

$$(0)^2 - 3y + 1 = (0) - y \Rightarrow -3y + 1 = -y \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

El punto de intersección con el eje vertical es $(0, \frac{1}{2})$.

Calculemos, ahora, los puntos de intersección de la curva $-2y^2 + y + 4x^2 - 7x = 6$ con los ejes coordenados.

* Intersecciones con el eje x : Hacemos $y = 0$.

$$-2(0)^2 + (0) + 4x^2 - 7x = 6 \Rightarrow 4x^2 - 7x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49+96}}{8} \Rightarrow$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{145}}{8} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7 + \sqrt{145}}{8} \approx 2.38 \\ x_2 = \frac{7 - \sqrt{145}}{8} \approx -0.63 \end{cases}$$

Los puntos de intersección son $P_1 = \left(\frac{7+\sqrt{145}}{8}, 0\right)$ y $P_2 = \left(\frac{7-\sqrt{145}}{8}, 0\right)$

* Intersecciones con el eje y : Hacemos $x = 0$.

$$-2y^2 + y + 4(0)^2 - 7(0) = 6 \Rightarrow -2y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1-48}}{-4} \in \mathbb{C}$$

Lo anterior indica que no hay intersecciones con el eje y . ★

(3) Calcule el centro y el radio de la circunferencia $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$.
(10 puntos)

Solución:

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0 \Rightarrow (ax^2 + bx) + (ay^2 + cy) = -d \Rightarrow$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + a\left(y^2 + \frac{c}{a}y\right) = -d \Rightarrow \left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + \left(y^2 + \frac{c}{a}y\right) = -\frac{d}{a} \Rightarrow$$

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + \left(y^2 + \frac{c}{a}y + \left(\frac{c}{2a}\right)^2\right) = -\frac{d}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{2a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2a}\right)^2 = -\frac{d}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{2a}\right)^2$$

$$\therefore \text{Centro} = (h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{c}{2a}\right), \text{radio} = r = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{2a}\right)^2 - \frac{d}{a}}$$

Lo anterior es válido si $a \neq 0$.

Si $a = 0$, entonces la ecuación $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ se transforma en $bx + cy + d = 0$, que es la ecuación de una recta. ★