UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA N° 1 CÁLCULO 1

INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA - INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 50 MINUTOS FECHA : Vi 14/09/07

(1) Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando todas sus respuestas**.

$a)$ __F__ La inecuación $\frac{3x+2}{x^2+1} > 1$ no tiene soluciones reales.

Justificación:

$x = 1$ es un número real y además es solución de la inecuación porque $\frac{3x+2}{x^2+1} = \frac{3(1)+2}{(1)^2+1} = \frac{3+2}{1+1} = \frac{5}{2} = 2.5 > 1$★

$b)$ ___V__ $\frac{x}{\pi} < \left|\frac{x}{e}\right|$, para $x \neq 0$.

Justificación:

Como $x \neq 0$ debemos analizar sólo dos casos :

Caso 1 : $x > 0$ (Recuerde que $e \approx 2.72 > 0$ y $\pi \approx 3.14$)

$x > 0 \Rightarrow \left|\frac{x}{e}\right| = \frac{x}{e}$

$\frac{x}{\pi} < \left|\frac{x}{e}\right| \Rightarrow \frac{x}{\pi} < \frac{x}{e} \Rightarrow e\,x < \pi\,x \Rightarrow e\,x - \pi\,x < 0 \Rightarrow (e-\pi)\,x < 0 \Rightarrow^{e-\pi<0} x > 0$

Por lo tanto la solución en este primer caso es $S_1 = (0, \infty)$

Caso 2 : $x < 0$ (Recuerde que $e \approx 2.72 > 0$ y $\pi \approx 3.14$)

$x < 0 \Rightarrow \left|\frac{x}{e}\right| = -\frac{x}{e}$

$\frac{x}{\pi} < \left|\frac{x}{e}\right| \Rightarrow \frac{x}{\pi} < -\frac{x}{e} \Rightarrow e\,x < -\pi\,x \Rightarrow e\,x + \pi\,x < 0 \Rightarrow (e+\pi)\,x < 0 \Rightarrow^{e+\pi>0}$
$x < 0$

Por lo tanto, la solución en este segundo caso es $S_2 = (-\infty, 0)$

La solución final es $S_f = S_1 \cup S_2 = (0, \infty) \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} - \{0\}$

Lo anterior significa que : $\frac{x}{\pi} < \left|\frac{x}{e}\right|$, para $x \neq 0$★

$c)$ __F__ La distancia entre los puntos de intersección de las curvas $y + 2x^2 = -3y + 5$ y $x + 3y = -4$ es 5.

Justificación:

De $x + 3y = -4$ se tiene que : $y = -\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x$ (1)

Reemplazando (1) en $y + 2x^2 = -3y + 5$ (ó en $4y + 2x^2 - 5 = 0$) se tiene :

$4y + 2x^2 - 5 = 0 \Rightarrow^{(1)} -\frac{16}{3} - \frac{4}{3}x + 2x^2 - 5 = 0 \Rightarrow 2x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{31}{3} = 0 \Rightarrow$

$$6x^2-4x-31=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4+\sqrt{16+744}}{12} = \frac{4+\sqrt{760}}{12} = \frac{2+\sqrt{190}}{6} \approx 2.63 \\ x_2 = \frac{4-\sqrt{16+744}}{12} = \frac{4-\sqrt{760}}{12} = \frac{2-\sqrt{190}}{6} \approx -1.96 \end{cases}$$

$$\text{De }(1) : \begin{cases} y_1 = -\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_1 = -\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\frac{2+\sqrt{190}}{6} = \frac{-26-\sqrt{190}}{18} \approx -2.21 \\ y_2 = -\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\frac{2-\sqrt{190}}{6} = \frac{-26+\sqrt{190}}{18} \approx -0.68 \end{cases}$$

Los puntos de intersección son :

$P_1 = (x_1, y_1) = \left(\frac{2+\sqrt{190}}{6}, \frac{-26-\sqrt{190}}{18}\right)$ y $P_2 = (x_2, y_2) = \left(\frac{2-\sqrt{190}}{6}, \frac{-26+\sqrt{190}}{18}\right)$

y la distancia entre ellos es :

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{190}}{6}\right)^2 + \left(\frac{-2\sqrt{190}}{18}\right)^2} = \sqrt{\frac{190}{9} + \frac{190}{81}} = \sqrt{\frac{1900}{81}} \approx 4.84 \neq 5 \bigstar$$

$d)$ __F__ La circunferencia $4x^2+4y^2-3y+2x=1$ posee centro $(-1,1)$ y radio 1.

Justificación:

$$4x^2+4y^2-3y+2x=1 \Rightarrow (4x^2+2x)+(4y^2-3y)=1 \Rightarrow$$

$$4(x^2+\frac{1}{2}x)+4(y^2-\frac{3}{4}y)=1 \Rightarrow (x^2+\frac{1}{2}x)+(y^2-\frac{3}{4}y)=\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$(x+\frac{1}{4})^2+(y-\frac{3}{8})^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{9}{64} \Rightarrow (x+\frac{1}{4})^2+(y-\frac{3}{8})^2 = \frac{29}{64}$$

El centro es $C = \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right) \neq (-1,1)$ y el radio es $r = \sqrt{\frac{29}{64}} = \frac{\sqrt{29}}{8} \approx 0.67 \neq 1 \bigstar$

$e)$ __F__ El triángulo con vértices $A(6,-7)$, $B(11,-3)$, $C(1,0)$ es rectángulo.

Justificación:

$$m_{CA} = \frac{0-(-7)}{1-6} = -\frac{7}{5}$$

$$m_{AB} = \frac{-3+7}{11-6} = \frac{4}{5}$$

Como $m_{CA} \cdot m_{AB} = -\frac{7}{5}\frac{4}{5} = -\frac{28}{25} \neq -1$ el ángulo CAB no es de $90°$

$$m_{AB} = \frac{-3+7}{11-6} = \frac{4}{5}$$

$$m_{BC} = \frac{0+3}{1-11} = -\frac{3}{10}$$

Como $m_{AB} \cdot m_{BC} = -\frac{4}{5}\frac{3}{10} = -\frac{12}{50} \neq -1$ el ángulo ABC no es de $90°$

$$m_{BC} = \frac{0+3}{1-11} = -\frac{3}{10}$$

$m_{CA} = \frac{0+7}{1-6} = -\frac{7}{5}$

Como $m_{BC} \cdot m_{CA} = \frac{3}{10}\frac{7}{5} = \frac{21}{50} \neq -1$ el ángulo BCA no es de $90°$

De lo anterior concluimos que el triángulo no es rectángulo.★

$f)$ __F__ El conjunto solución de la inecuación $\sqrt{x} \geq |x|$ es $S = [0, 1)$

Justificación:

Para resolver la inecuación $\sqrt{x} \geq |x|$ debemos imponer la condición obligatoria $x \geq 0$ porque la raíz de un número negativo no está permitida.

Usando la condición que $x \geq 0$ se tiene :

$\sqrt{x} \geq |x| \Rightarrow x \geq x^2 \Rightarrow x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0$

Los puntos críticos son $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$.

La tabla asociada es :

	$x < x_1 = 0$	$x = x_1 = 0$	$x_1 = 0 < x < x_2 = 1$	$x = x_2 = 1$	$x > x_2 = 1$
x	$-$	0	$+$	1	$+$
$1-x$	$+$	1	$+$	0	$-$
$x(1-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

De la tabla se observa que el conjunto solución es : $S = [0, 1] \neq [0, 1)$ ★

$g)$ __F__ La recta que pasa por los puntos de intersección de las curvas $3x^2 = y + \frac{1}{2}$ y $x^2 + 3y^2 - 2y = 4$ es paralela a $x - y = 0$

Justificación:

De $x^2 + 3y^2 - 2y = 4$ se tiene que : $3x^2 = 12 + 6y - 9y^2$

Igualando la expresión anterior con $3x^2 = y + \frac{1}{2}$ tenemos que

$12 + 6y - 9y^2 = y + \frac{1}{2} \Rightarrow -9y^2 + 5y + \frac{23}{2} = 0 \Rightarrow 18y^2 - 10y - 23 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{10+\sqrt{100+1656}}{36} = \frac{10+\sqrt{1756}}{36} \approx 1.44 \\ y_2 = \frac{10-\sqrt{100+1656}}{36} = \frac{10-\sqrt{1756}}{36} \approx -0.89 \end{cases}$$

Observamos que si reemplazamos $y_2 \approx -0.89$ en $3x^2 = y + \frac{1}{2}$ obtendremos raíces complejas, esto significa que el valor de y_2 no debe ser considerado.

Para $y_1 = \frac{10+\sqrt{1756}}{36} \approx 1.44$ obtendremos dos valores de x asociados, es decir, los puntos de intersección tendrán la forma $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_1)$, luego la pendiente de la recta que une los puntos de intersección será $m_{P_1P_2} = \frac{y_1-y_1}{x_1-x_2} = 0$ que no coincide con la pendiente de la recta $x - y = 0$, que es 1 (La recta es $y = x$), por lo tanto, las rectas mencionadas no pueden ser paralelas.★

(42 puntos).

(2) Dadas las curvas

$a)\qquad x^2+3y+1=x-y$

$b)\qquad 4x^2+4y^2-2y-10=0$

$c)\quad 2y^2+y+4x^2-7x=6$

$i)$ Grafique todas las curvas en un mismo gráfico.

$ii)$ Obtenga los puntos de intersección de la curva $c)$ con los ejes coordenados.

(18 puntos).

<u>Solución:</u>

$a)\, x^2+3y+1=x-y \Rightarrow (x^2-x)=-4y-1 \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2=-4y-1+\frac{1}{4} \Rightarrow$
$(x-\frac{1}{2})^2=-4y-\frac{3}{4} \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2=-4\big(y+\frac{3}{16}\big)$

Observamos que el vértice de la parábola está ubicado en $\big(\frac{1}{2}\,,\,-\frac{3}{16}\big)$ y apunta hacia abajo.

$b)\;\; 4x^2+4y^2-2y-10=0 \Rightarrow 4x^2+(4y^2-2y)=10 \Rightarrow 4\,x^2+4(y^2-\frac{1}{2}y)=10 \Rightarrow$
$x^2+(y^2-\frac{1}{2}y)=\frac{10}{4} \Rightarrow x^2+(y-\frac{1}{4})^2=\frac{10}{4}+\frac{1}{16} \Rightarrow x^2+(y-\frac{1}{4})^2=\frac{41}{16}$

La curva anterior es una circunferencia con centro en $C=(0,\frac{1}{4})$ y radio $r=\frac{\sqrt{41}}{4}\approx 1.6$

$c)\;\; 2y^2+y+4x^2-7x=6 \Rightarrow\; (4x^2-7x)+(2y^2+y)=6 \Rightarrow$

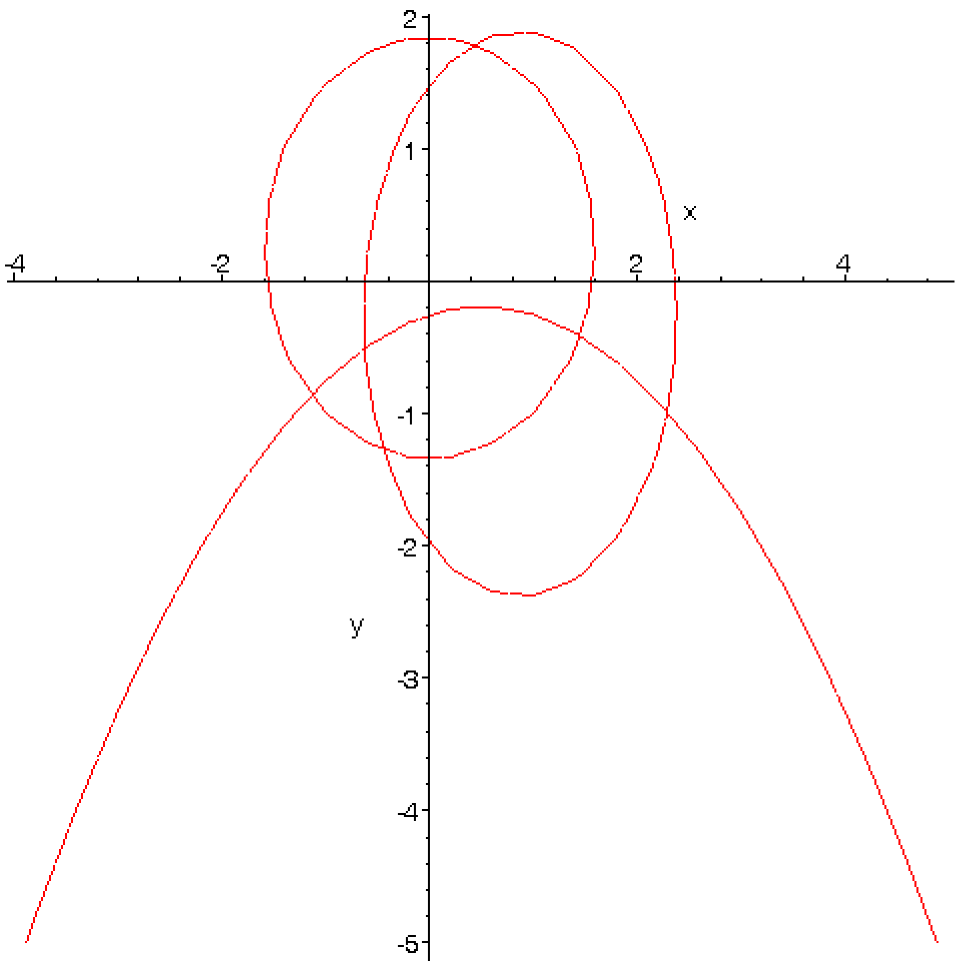
$4\,(x^2-\frac{7}{4}x)+2(y^2+\frac{1}{2}y)=6 \Rightarrow 4\,(x-\frac{7}{8})^2+2\,(y+\frac{1}{4})^2=6+4(\frac{7}{8})^2\;+2(\frac{1}{4})^2 \Rightarrow$

$4\,(x-\frac{7}{8})^2+2\,(y+\frac{1}{4})^2=6+\frac{49}{16}+\frac{1}{8} \Rightarrow 4\,(x-\frac{7}{8})^2+2\,(y+\frac{1}{4})^2=\frac{147}{16} \Rightarrow$

$\frac{(x-\frac{7}{8})^2}{\frac{1}{4}}+\frac{(y+\frac{1}{4})^2}{\frac{1}{2}}=\frac{147}{16} \Rightarrow \frac{(x-\frac{7}{8})^2}{\frac{1}{4}\frac{147}{16}}+\frac{(y+\frac{1}{4})^2}{\frac{1}{2}\frac{147}{16}}=1 \Rightarrow \frac{(x-\frac{7}{8})^2}{\frac{147}{64}}+\frac{(y+\frac{1}{4})^2}{\frac{147}{32}}=1$

Observamos que la curva anterior es una elipse con centro en $R=\big(\frac{7}{8}\,,\,-\,\frac{1}{4}\big)$, semieje mayor $a=\sqrt{\frac{147}{32}}\approx 2.14$ y semieje menor $b=\sqrt{\frac{147}{64}}\approx 1.52$

$i)$



$ii)$ Calculemos los puntos de intersección de la curva $c)$ $2y^2 + y + 4x^2 - 7x = 6$ con los ejes coordenados.

<u>Intersecciones con el eje x :</u>

$y = 0 \Rightarrow\ 2(0)^2 + (0) + 4x^2 - 7x = 6 \Rightarrow 4x^2 - 7x - 6 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7+\sqrt{145}}{8} \approx 2.38 \\ x_2 = \frac{7-\sqrt{145}}{8} \approx\ -0.63 \end{cases}$$

Los puntos de intersección con el eje x son : $A = \left(\frac{7+\sqrt{145}}{8},\ 0\right)$ y $B = \left(\frac{7-\sqrt{145}}{8},\ 0\right)$

<u>Intersecciones con el eje y :</u>

$x = 0 \Rightarrow\ 2y^2 + y + 4(0)^2 - 7(0) = 6 \Rightarrow 2y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{-1+\sqrt{1+48}}{4} = \frac{-1+\sqrt{49}}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5 \\ y_2 = \frac{-1-\sqrt{1+48}}{4} = \frac{-1-\sqrt{49}}{4} = -\ \frac{8}{4} =\ -2 \end{cases}$$

Los puntos de intersección con el eje y son : $C = \left(0,\ \frac{3}{2}\right)$ y $D = (0,\ -2)\square$