UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA N° 2 ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA — INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____CARRERA :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 20 MINUTOS FECHA : Mi 11/10/17

$1)$ Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(\alpha) = cosh(\alpha) = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$ (función llamada coseno hiperbólico)
$a)$ Obtenga $Dom(f)$ y $Rec(f)$
$b)$ Resuelva la ecuación $f(x) = 2e$
$c)$ Determine f^{-1}, si existe. Si no existe, redefina en forma apropiada
$d)$ Calcule $f(1),\ f(-1)$ y $f(0)$
$e)$ Determine si f es par, impar o ninguna de las dos.

(30 puntos).

<u>Solución:</u>

$a)$ Notamos que $f(\alpha)$ es suma de funciones exponenciales $\frac{e^{\alpha}}{2} + \frac{e^{-\alpha}}{2}$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$ en ambos casos, por lo que $Dom(f) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
Para determinar el recorrido tenemos dos posibles caminos: el analítico o el gráfico.
Usemos el método analítico.
Sea $y = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$. Luego $y > 0$, porque e^{α} y $e^{-\alpha}$ son positivas.

$$y = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \Rightarrow 2y = e^{\alpha} + e^{-\alpha} \Rightarrow^{/\cdot e^{\alpha}} 2y\, e^{\alpha} = (e^{\alpha})^2 + 1 \Rightarrow (e^{\alpha})^2 - 2y\, e^{\alpha} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow^{v=e^{\alpha}} v^2 - 2y\, v + 1 = 0 \Rightarrow v = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2-4}}{2} = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2-1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2-1}$$

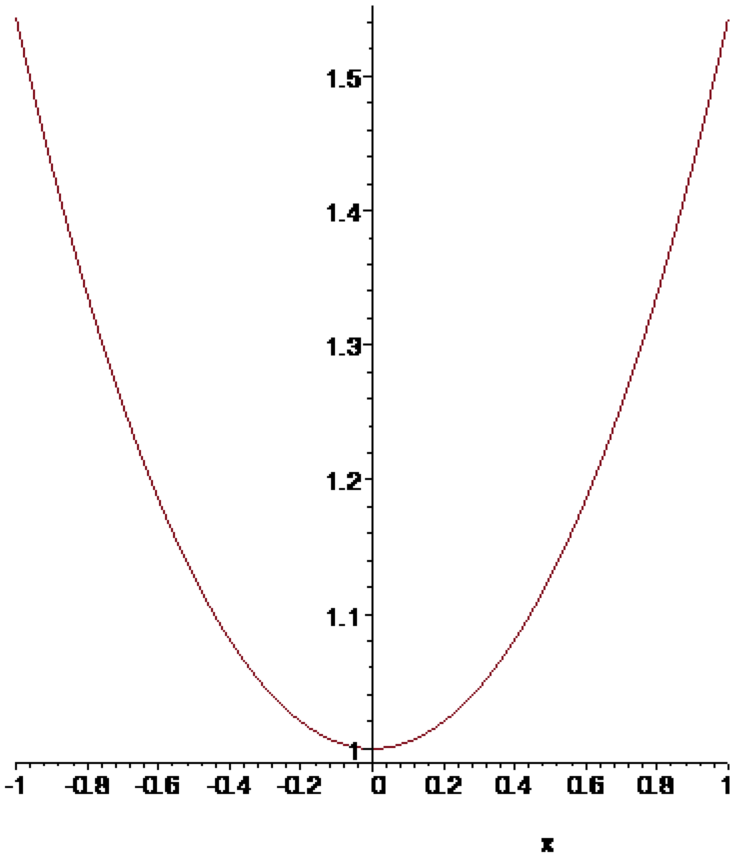
$$\Rightarrow e^{\alpha} = y \pm \sqrt{y^2-1} \Rightarrow \alpha = ln(y \pm \sqrt{y^2-1}) \in \mathbb{R}$$

Tenemos que $y^2 - 1 \geq 0$, es decir, $y^2 \geq 1$, o lo que es lo mismo $y \geq 1$ ó $y \leq -1$. Pero $y > 0$, de donde $y \geq 1$
Además $y \pm \sqrt{y^2-1} > 0$
$y \pm \sqrt{y^2-1} > 0 \Rightarrow \pm \sqrt{y^2-1} > -y$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{y^2-1} > -y \Rightarrow y \in \mathbb{R} \\ -\sqrt{y^2-1} > -y \Rightarrow \sqrt{y^2-1} < y \Rightarrow y^2-1 < y^2 \Rightarrow -1 < 0 \Rightarrow y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

De lo anterior, se concluye que $Rec(f) = [1, +\infty)$

Usemos ahora el método gráfico.



De la gráfica se observa que $Rec(f) = [1, +\infty)$ $\square$

$b)$ Resolvamos la ecuación $f(x) = 2e$

Si comparamos la ecuación dada con el desarrollo para obtener recorrido en $a)$, notamos que $\alpha = x$ y $f(x) = y = 2e > 1$, por lo que

$$x = \begin{cases} ln(y + \sqrt{y^2-1}) \\ ln(y - \sqrt{y^2-1}) \end{cases} = \begin{cases} ln(2e + \sqrt{4e^2-1}) \\ ln(2e - \sqrt{4e^2-1}) \end{cases} \square$$

$c)$ Notamos que la función dada no es sobreyectiva, pues $Rec(f) = [1, +\infty)$ $\neq Cod(f) = \mathbb{R}$

Además, de la gráfica observamos que f no es inyectiva. Debemos restringir el dominio; por ejemplo, $\mathbb{R}^+$

Redefinamos

$g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow [1, +\infty)$, con $g(\alpha) = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}$

La inversa es

$g^{-1}: [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, con $g^{-1}(x) = ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ $\square$

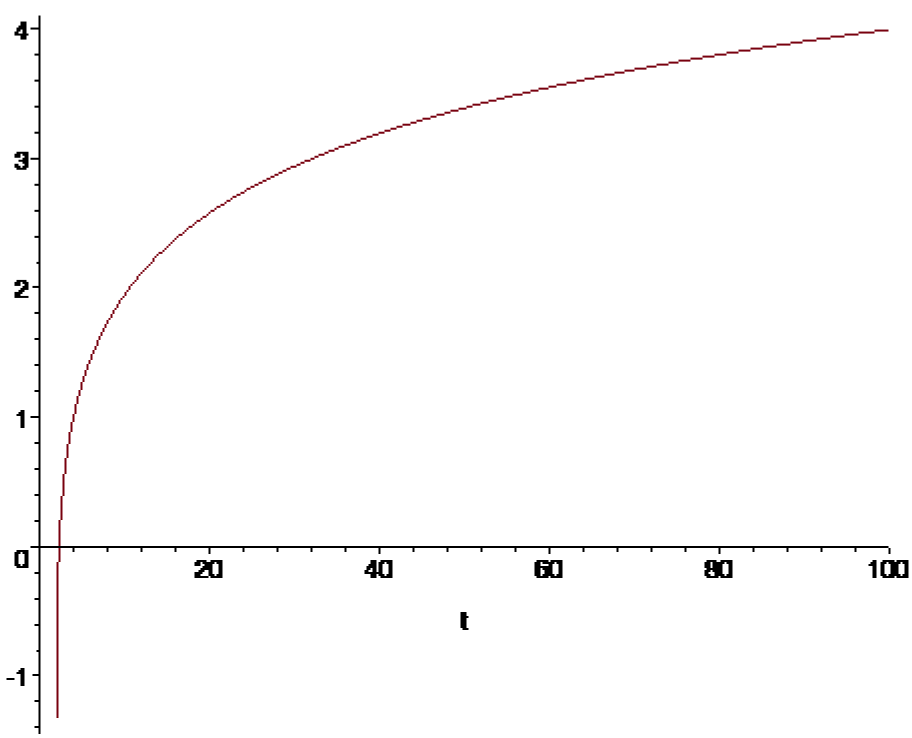
$d)$ $f(1) = \frac{e^1 + e^{-1}}{2} = \frac{e + e^{-1}}{2}$
$f(-1) = \frac{e^{-1} + e^1}{2} = \frac{e + e^{-1}}{2}$
$f(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1 + 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ $\square$

$e)$ La función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(\alpha) = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$ es par, porque si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $-\alpha \in \mathbb{R}$ y además $f(-\alpha) = \frac{e^{-\alpha} + e^{\alpha}}{2} = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = f(\alpha)$ $\square$

$2)$ Sea $P: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $P(t) = log(t-2) + log(t+1)$
$a)$ Verifique si P^{-1} existe.
$b)$ Resuelva la ecuación $P(a) = log(40) - 1$
$c)$ Obtenga $P \circ h$ y $P + h$, si $h(r) = e^r$
$d)$ Calcule $P(\frac{1}{\pi})$ y $P(12)$
$e)$ Muestre que : $10^{P(t)} = t^2 - t - 2$

(30 puntos).

Solución:
$a)$ Notemos que $t - 2 > 0$ y $t + 1 > 0$, es decir, $t > 2$ y $t > -1$
Luego, $Dom(P) = [2, +\infty)$
Grafiquemos



De la gráfica observamos que $Rec(P) = \mathbb{R} = Cod(P)$
Ahora $P : [2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $P(t) = log(t-2) + log(t+1)$ posee inversa $\square$

$b)$ $P(a) = log(40) - 1 \Rightarrow log(a-2) + log(a+1) = log(40) - 1$
$\Rightarrow log((a-2)(a+1)) = log(40) - 1$
$\Rightarrow log((a-2)(a+1)) = log(40) - log(10) \Rightarrow log((a-2)(a+1)) = log(\frac{40}{10})$
$\Rightarrow log((a-2)(a+1)) = log(4) \Rightarrow (a-2)(a+1) = 4 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 4$
$\Rightarrow a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow a = \frac{1 \pm 5}{2}$

$$\Rightarrow a = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

El valor $a = -2$ no sirve porque no pertenece al dominio; en cambio $a = 3$ es solución de la ecuación dada. $\square$

$c)$ En primer lugar, observemos que $Dom(P) = [2, +\infty)$ y $Dom(h) = \mathbb{R}$

Calculemos $P \circ h$
$Dom(P \circ h) = \{x \in Dom(h)$ y $h(x) \in Dom(P)\}$
$= \{x \in \mathbb{R}$ y $e^x \in [2, +\infty)\} = \{x \in \mathbb{R}$ y $e^x \geq 2\} = \{x \geq ln(2)\} = [ln(2), +\infty)$
Pues $e^x \geq 2 \Rightarrow x \geq ln(2)$

Luego $P \circ h : [ln(2), +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $(P \circ h)(x) = P(h(x)) = P(e^x) = log(e^x - 2) + log(e^x + 1)$

Determinemos ahora $P + h$
$Dom(P + h) = Dom(P) \cap Dom(h) = [2, +\infty) \cap \mathbb{R} = [2, +\infty)$
Luego $P + h : [2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, con

$$(P + h)(x) = P(x) + h(x) = log(x-2) + log(x+1) + e^x \quad \square$$

$d)$ $P(\frac{1}{\pi})$ no se puede calcular porque $\frac{1}{\pi} < 2$, y no está en el dominio de la función P
$P(12) = log(12-2) + log(12+1) = log(10) + log(13) = 1 + log(13)$ $\square$

$e)$ $10^{P(t)} = 10^{log(t-2)+log(t+1)} = 10^{log(t-2)} \cdot 10^{log(t+1)} = (t-2)(t+1) = t^2 - t - 2$ $\square$