UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA N° 1 ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA — INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____CARRERA :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 20 MINUTOS FECHA : Mi 13/09/17

$1)$ La suma de dos números es $12.$ Obtenga el dominio y el recorrido del producto entre los dos números.

(16 puntos).

Solución:
Sean x y y los números. Luego $x+y=12$, es decir, $y=12-x$
El producto P entre los números es $P=x\cdot y=x(12-x)=12x-x^2$
La función a considerar es $P(x)=12x-x^2$
Notamos que $Dom(P)=\mathbb{R}$, pues x puede tomar cualquier valor real.
Determinemos $Rec(P)$

$$P=12x-x^2 \Rightarrow x^2-12x+P=0 \Rightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{144-4P}}{2}=\frac{12\pm\sqrt{4(36-P)}}{2}$$

$$=\frac{12\pm 2\sqrt{36-P}}{2}=\frac{2(6\pm\sqrt{36-P}\,)}{2}=6\pm\sqrt{36-P}$$

Para que x sea un número real, se debe tener que $36-P\geq 0$, es decir, $P\leq 36$

Luego, $Rec(P)=(-\infty,36]$ ❑

$2)$ Obtenga el valor veritativo de las siguientes proposiciones. Justifique.
$a)$ "$A\cup B^c=\{-1\}$ y $A\cap B^c=\emptyset$", para $A=\{x\in\mathbb{R}/x^2-1=0\}$ y $B=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 5\}$
$b)$ $(p\wedge q')\leftrightarrow p$ es una tautología
$c)$ El recorrido de la función $T(a)=\pi$ es π

(24 puntos).

Solución:
$a)$ $A=\{x\in\mathbb{R}/x^2-1=0\}=\{x\in\mathbb{R}/x^2=1\}=\{x\in\mathbb{R}/x=1,\ x=-1\}$
$=\{-1,1\}$
$B=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 5\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 3\}=[3,+\infty)$
Luego, $B^c=(-\infty,3)$

Así, $A \cup B^c = \{-1,1\} \cup (-\infty,3) = (-\infty,3) \neq \{-1\}$
Por otro lado, $A \cap B^c = \{-1,1\} \cap (-\infty,3) = \{-1,1\} \neq \emptyset$
Finalmente, si $p : A \cup B^c = \{-1\}$ y $q : A \cap B^c = \emptyset$, entonces $v(p \wedge q) = F$, pues $v(p) = F$ y $v(q) = F$ $\square$

$b)$

p	q	q'	$p \wedge q'$	$(p \wedge q') \leftrightarrow p$
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

De la tabla anterior notamos que $(p \wedge q') \leftrightarrow p$ no es una tautología, porque la última columna de la tabla no contiene solamente valores verdaderos. $\square$

$c)$ El recorrido de la función $T(a) = \pi$ es $\{\pi\}$, pues el recorrido de una función es un conjunto, no un número. $\square$

$3)$ Si $P = 2\pi r$ representa el perímetro de un círculo de radio variable r, entonces determine si P es biyectiva.

(10 puntos).

Solución:

En primer lugar debemos notar que $P : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $P(r) = 2\pi r$. El radio de un círculo siempre es positivo o eventualmente cero, pero este último caso no lo consideraremos porque no tiene mucho sentido.
Veamos si P es inyectiva, usando el método analítico.
$P(r_1) = P(r_2) \Rightarrow 2\pi r_1 = 2\pi r_2 \Rightarrow r_1 = r_2$
Esto muestra que P es inyectiva.
Veamos si es sobreyectiva.
Determinemos el recorrido.
$P = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{P}{2\pi}$
Sabemos, por el dominio considerado, que $r > 0$, es decir, $\frac{P}{2\pi} > 0$, de donde $P > 0$
Luego $Rec(P) = \mathbb{R}^+ \neq Cod(P) = \mathbb{R}$ (Recuerde que cuando no se menciona el codominio, este se asume igual a $\mathbb{R}$)
Esto muestra que P no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco es biyectiva. $\square$

$4)$ Determine $A \times B$ y $\#(B \times A)$, para $A = \{1, -1\}$ y $B = \{0, 5\}$

(10 puntos).

Solución:

$A \times B = \{(1,0),(1,5),(-1,0),(-1,5)\}$
$\#(B \times A) = \#\{(0,1),(5,1),(0,-1),(5,-1)\} = 4$ $\square$