

**PAUTA PRUEBA GLOBAL DE RECUPERACIÓN
ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA
INGENIERÍA AMBIENTAL**

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS

FECHA : Ju 27/08/20

1) Muestre que las raíces positivas de la ecuación $\text{sen}(3x) = 1$ forman una progresión aritmética

Solución:

$$\text{sen}(y) = 1 \Rightarrow y = \dots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots$$

Los factores involucrados son $\dots, -3, 1, 5, 9, \dots$ que forman una progresión aritmética con diferencia igual a 4. ($-3 + 4 = 1, 1 + 4 = 5, \dots$)

Si consideramos sólo las raíces positivas, entonces el primer término de la progresión aritmética es 1.

Por otro lado, $y = 3x$, de donde $x = \frac{y}{3}$.

Finalmente la progresión aritmética que se forma es:

$$\frac{1}{3} \frac{\pi}{2}, \frac{5}{3} \frac{\pi}{2}, \frac{9}{3} \frac{\pi}{2}, \frac{13}{3} \frac{\pi}{2}, \dots \quad \square$$

(25 puntos).

2) Obtenga $f(\ln(x))$ si $f(x) = e^x - e^{-x}$, $x > 0$

Solución:

$$f(\ln(x)) = e^{\ln(x)} - e^{-\ln(x)} = e^{\ln(x)} - e^{\ln(x^{-1})} = x - x^{-1} = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} \quad \square$$

(10 puntos).

3) Dada $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow [1, +\infty)$, $f(x) = 2x^2 + 1$, obtenga f^{-1} , si existe.

Solución:

Veamos si f es biyectiva:

i) Inyectividad. En efecto: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1^2 + 1 = 2x_2^2 + 1 \Rightarrow$

$$2x_1^2 = 2x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \stackrel{x \in \mathbb{R}^+}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

ii) Sobreyectividad. En efecto:

$$y = 2x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = \frac{y-1}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{y-1}{2}} \Rightarrow_{x \in \mathbb{R}^+} x = \sqrt{\frac{y-1}{2}}$$

$$\frac{y-1}{2} > 0 \Rightarrow y - 1 > 0 \Rightarrow y > 1$$

$$Rec(f) = [1, +\infty) = Cod(f)$$

Finalmente, la inversa de f está definida por:

$$f^{-1} : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+, f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2}} \quad \square$$

(25 puntos).