UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST N° 2 ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL - INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA - INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 20 MINUTOS FECHA : Mi 08/04/09

1) Simplifique:

$a)\ \frac{(x-y)^3-(x^3-y^3)}{xy(x-y)}$

$b)\ \left(\frac{a^{-1}}{a^0+(\frac{a}{b})^{-1}}\right)^{-2} - \left(\frac{a\,b^{-1}-b^0}{b^{-1}}\right)^2$

(15 puntos).

<u>Solución:</u>

$$a)\ \frac{(x-y)^3-(x^3-y^3)}{xy(x-y)} = \frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-x^3+y^3}{xy(x-y)} = \frac{3xy^2-3x^2y}{xy(x-y)} = \frac{3xy(y-x)}{xy(x-y)} =$$

$$\frac{3(y-x)}{(x-y)} = \frac{-3(x-y)}{(x-y)} = -3 \ \square$$

$$b)\ \left(\frac{a^{-1}}{a^0+(\frac{a}{b})^{-1}}\right)^{-2} - \left(\frac{a\,b^{-1}-b^0}{b^{-1}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{b}{a}}\right)^{-2} - \left(\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{1}{b}}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{a+b}{a}}\right)^{-2} - \left(\frac{\frac{a-b}{b}}{\frac{1}{b}}\right)^2 = \left(\frac{1}{a+b}\right)^{-2} - (a-b)^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2 =$$

$$a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2 = 4ab \ \square$$

2) Un ciclista recorre durante el primer minuto 123 metros, incrementando su recorrido a razón de 6 metros en cada minuto que transcurre. Si al finalizar todo su paseo se da cuenta que recorrió un total de 1683 metros, ¿cuánto tiempo empleó el ciclista en este paseo?.

(15 puntos).

Solución:

En este ejercicio estamos frente a una progresión aritmética y nos damos cuenta que $a = 123$ y $d = 6$.

Ahora

$$S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d \Rightarrow 1683 = 123n + \frac{n(n-1)}{2}6 \Rightarrow 1683 = 123n + 3n(n-1) \Rightarrow$$

$$3n^2 - 3n + 123n - 1683 = 0 \Rightarrow 3n^2 + 120n - 1683 = 0 \Rightarrow n^2 + 40n - 561 = 0 \Rightarrow$$

$$n = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4(-561)}}{2} \Rightarrow n = \frac{-40 \pm \sqrt{1600+2244}}{2} \Rightarrow$$

$$n = \frac{-40 \pm \sqrt{3844}}{2} \Rightarrow n = \frac{-40 \pm 62}{2} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = \dfrac{-40+62}{2} = \dfrac{22}{2} = 11 \\ n_2 = \dfrac{-40-62}{2} = -\dfrac{102}{2} = -51 \end{cases}$$

Claramente el valor de n no puede ser negativo, por lo que la solución es $n = n_1 = 11$ minutos, es decir, recorrió un total de 1683 metros en 11 minutos. $\square$

3) Una ciudad tiene 600000 habitantes. La tasa de crecimiento de esa población es 8% anual. ¿Cuántos habitantes tendrá dentro de 10 años?

(15 puntos).

Solución:

La población inicial es $a = 600000$ habitantes.
Al año, el número de habitantes será $a + 0.08a = 1.08\,a$
Al segundo año será $1.08a + 0.08(1.08a) = 1.08(1.08a) = (1.08)^2 a$
Al tercer año será $(1.08)^2 a + 0.08(1.08)^2 a = (1.08)^2(1.08)a = (1.08)^3 a$

Continuando con este razonamiento nos damos cuenta que al décimo año la población será $(1.08)^{10} a = (2.158925)\,(600000) \approx 1.295.355$ habitantes $\square$

4) Calcule

$a)\ \sum_{k=1}^{25}(-\ \frac{1}{2})^{2k-4}$

$b)\ \prod_{j=1}^{10}\frac{1}{j+1}$

(15 puntos).

<u>Solución:</u>

$$a)\ \sum_{k=1}^{25}(-\ \tfrac{1}{2})^{2k-4} = \sum_{k=1}^{25}(-\ \tfrac{1}{2})^{2k}(-\ \tfrac{1}{2})^{-4} = (-\ \tfrac{1}{2})^{-4}\sum_{k=1}^{25}(-\ \tfrac{1}{2})^{2k} =$$

$$(-\ \tfrac{1}{2})^{-4}\sum_{k=1}^{25}\left[(-\ \tfrac{1}{2})^{2}\right]^{k} = (-2)^4\sum_{k=1}^{25}\left[\tfrac{1}{4}\right]^{k} = 16\ \frac{\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{4}\right]^{25}}{1-\frac{1}{4}} \approx 5.33333$$

Recordemos que : $\sum_{k=0}^{n} a\,r^k = a\frac{1-r^n}{1-r}$, es decir, $1+r+r^2+....+r^n = \frac{1-r^n}{1-r}$, de donde

$r+r^2+r^3+....+r^n = \frac{1-r^n}{1-r} - 1 \Rightarrow$

$\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r-r^n}{1-r}$ ❑

$$b)\ \prod_{j=1}^{10}\frac{1}{j+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{6}\frac{1}{7}\frac{1}{8}\frac{1}{9}\frac{1}{10}\frac{1}{11} = \frac{1}{39916800}$$ ❑