UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TAREA SUMATIVA PRIMER CERTAMEN
ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL - INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA - INGENIERÍA EN ALIMENTOS

Obs.: Los alumnos deben responder sólo uno de los ejercicios y el puntaje asociado es 0 ó 10 puntos. Si algún alumno entregó ambos ejercicios resueltos, entonces se revisa solamente el número **(2)**.

(1) Tres números están en progresión geométrica, si se aumenta el segundo en 30, la progresión formada entre ellos se vuelve aritmética y si luego se aumenta el último término en 240, la progresión se vuelve nuevamente geométrica. Obtenga la progresión original.

<u>Solución:</u>

Tres números están en progresión geométrica :

$a\,,\; a\,r\,,\; a\,r^2$

Si se aumenta el segundo en 30 la progresión se vuelve aritmética :

$$a\,,\; a\,r + 30\,,\; a\,r^2 \qquad (1)$$

Si se aumenta el último en 240 la progresión ahora es geométrica nuevamente :

$$a\,,\; a\,r + 30\,,\; a\,r^2 + 240 \qquad (2)$$

De (1) se tiene que :

$$a\,r + 30 - a = a\,r^2 - (a\,r + 30) \qquad (*)$$

De (2) se tiene que :

$$\frac{a\,r+30}{a} = \frac{a\,r^2+240}{a\,r+30} \qquad (**)$$

Despejemos a de $(*)$:

$$a\,r - a - a\,r^2 + a\,r = -60 \Rightarrow a\,r^2 - 2a\,r + a = 60 \Rightarrow a\,(r^2 - 2r + 1) = 60 \Rightarrow$$

$a = \frac{60}{r^2 - 2r + 1}$ (3)

Despejemos a de $(**)$:

$(a\,r + 30)^2 = a\,(a\,r^2 + 240) \Rightarrow a^2\,r^2 + 60\,a\,r + 900 = a^2\,r^2 + 240\,a \Rightarrow$

$240a - 60\,a\,r = 900 \Rightarrow a\,(240 - 60\,r) = 900 \Rightarrow a = \frac{900}{240 - 60\,r} \Rightarrow$

$a = \frac{15}{4 - r}$ (4)

Igualando las expresiones (3) y (4) :

$\frac{60}{r^2 - 2r + 1} = \frac{15}{4 - r} \Rightarrow 60\,(4 - r) = 15(r^2 - 2r + 1) \Rightarrow$

$240 - 60r = 15r^2 - 30r + 15 \Rightarrow 15r^2 + 30r - 225 = 0 \Rightarrow r^2 + 2r - 15 = 0 \Rightarrow$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{-2+8}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ r_2 = \frac{-2-8}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \end{cases}$$

Reemplazando los valores de r recién calculados en (4) :

$a_1 = \frac{15}{4 - r_1} = \frac{15}{4 - 3} = 15$

$a_2 = \frac{15}{4 - r_2} = \frac{15}{4 - (-5)} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

Finalmente las progresiones que satisfacen las condiciones dadas son :

$a)$ $a_1\,,\ a_1\,r_1\,,\ a_1\,r_1^2$

$15\,,\ 15\,(3),\ 15\,(3)^2$

$15\,,\ 45\,,\ 135$

$b)$ $a_2\,,\ a_2\,r_2\,,\ a_2\,r_2^2$

$\frac{5}{3}\,,\ \frac{5}{3}(-5),\ \frac{5}{3}\,(-5)^2$

$\frac{5}{3}\,,\ -\frac{25}{3},\ \frac{125}{3}$ ❑

(2) En el interior de un cuadrado que tiene lados de 1 pie de longitud, se construye un segundo cuadrado cuyos vértices son los puntos medios de los lados del primer cuadrado. De modo análogo, se construye un tercer cuadrado cuyos vértices son los puntos medios de los lados del segundo cuadrado. Si se continúa esta sucesión de construcciones

$a)$ calcule el área del décimo cuadrado

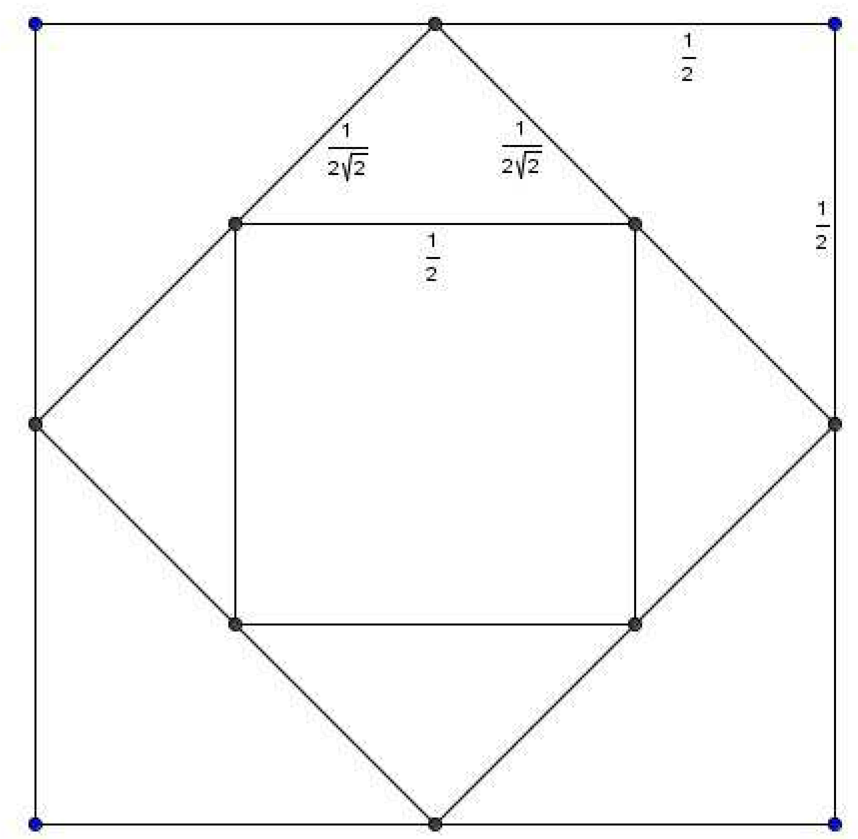
$b)$ calcule el área del $n-$ ésimo cuadrado

$c)$ calcule la suma de las áreas de los primeros 10 cuadrados

$d)$ calcule el límite de la suma de las áreas de los cuadrados.

<u>Solución:</u>

Si usamos el teorema de Pitágoras en forma repetida obtenemos los valores que se muestran en la siguiente figura.



Sea A_n el área del $n-$ ésimo cuadrado.

$A_1 = (1)^2 = 1\,pie^2$

$A_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}\ pie^2$

$A_3 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}\ pie^2$

Notamos que se genera un progresión geométrica con $a = 1$ y $r = \frac{1}{2}$

$a)\ A_{10} = a\, r^9 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^9 = \frac{1}{512}\ pie^2$

$b)\ A_n = a\, r^{n-1} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}\ pie^2$

$c)\ S_{10} = a\, \frac{1-r^{10}}{1-r} = 1\, \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{2046}{1024} pie^2 \approx 1,998\, pies^2$

$d)\ \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} a\, \frac{1-r^n}{1-r} = \lim_{n\to\infty} 1\, \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} =$

$2 \lim_{n\to\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] = 2\ \left[1 - 0 \right] = 2\, pies^2$ ❑