UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST 4 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

$Ejercicio\,1a)$

$x + ay = 1$
$2x - y = 3$

$a \neq -\frac{1}{2}$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_1(-2)+F_2} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & -1-2a & 1 \end{bmatrix}$$

Si $a \neq -\frac{1}{2}$, entonces $-1-2a \neq 0$
Luego $r(A) = r(Ab) = 2 = N$, por lo que el sistema es compatible determinado (una solución).

$Ejercicio\,1b)$

$2x + 3y + z = 1$
$-\frac{2}{5}x - \frac{3a}{5}y = a$

$a \in \mathbb{R}$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{3a}{5} & 0 & a \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_1(1/5)+F_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{5}-\frac{3a}{5} & \frac{1}{5} & a+\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Notamos que no importando el valor que tome a, se tiene que $r(A) = r(Ab) = 2 < N = 3,$ por lo que el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

$Ejercicio\, 1c)$

$$-3x + 4y = 3$$
$$6x + 3 = 8y + a$$

$$a \neq -3$$

Solución:

Reescribiendo el sistema

$$\begin{aligned} -3x + 4y &= 3 \\ 6x - 8y &= a - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 6 & -8 & a-3 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_1(2)+F_2} \begin{bmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & a+3 \end{bmatrix}$$

Si $a \neq -3$, entonces $a + 3 \neq 0$ y se tiene que $r(A) = 1 \neq r(Ab) = 2,$ por lo que el sistema es incompatible (no posee solución).

$Ejercicio\, 2$

Los vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, dispuestos como columnas, forman una matriz singular

Solución:

Calculemos los valores propios de $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(-2-\lambda) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow\ -6-3\lambda+2\lambda+\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda-7=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1\pm\sqrt{1+28}}{2} \Rightarrow \lambda=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2} \\ \lambda_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

Calculemos los vectores propios

Para $\lambda_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}$

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_1 & -1 \\ -1 & -2-\lambda_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2} & -1 \\ -1 & -2-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)a-b=0$$

$$\Rightarrow^{Fijo\, a}\quad b=\left(\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)a\,,\ \text{con}\ \ a\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Finalmente, el primer vector propio (que en realidad es una infinidad de vectores propios) es:

$$\boldsymbol{x_1}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ \left(\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)a \end{bmatrix},\ \text{con}\ \ a\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Para $\lambda_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}$

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_2 & -1 \\ -1 & -2-\lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2} & -1 \\ -1 & -2-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)c-d=0$$

$$\Rightarrow^{Fijo\, c}\quad d=\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)c\,,\ \text{con}\ \ c\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Finalmente, el segundo vector propio (que en realidad es una infinidad de vectores propios) es:

$$\boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}\right)c \end{bmatrix},$$ con $c \in \mathbb{R} - \{0\}$

Veamos ahora si $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ forman una matriz singular

$$\begin{vmatrix} a & \left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}\right)a \\ c & \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}\right)c \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}\right)ac - \left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}\right)ac$$

$$= \frac{5}{2}\,ac + \frac{\sqrt{29}}{2}\,ac - \frac{5}{2}\,ac + \frac{\sqrt{29}}{2}\,ac = \sqrt{29}\,ac \neq 0\,,$$ porque $a \neq 0$ y $c \neq 0$

Lo anterior muestra que la matriz no es singular porque posee inversa, por lo que se afirma es falso. ❑

$Ejercicio\,3$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ es vector propio de $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ con valor propio asociado igual a 4

Solución:

Sabemos que si $\boldsymbol{v}$ es vector propio de A con valor propio asociado λ, entonces se cumple la relación $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$

$$A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\boldsymbol{v} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Luego $A\boldsymbol{v} \neq \lambda\boldsymbol{v}$, y lo que se afirma es falso.