

**PAUTA TEST N° 4 ATRASADO ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL – INGENIERÍA
AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA – INGENIERÍA EN
ALIMENTOS**

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA

FECHA : Ma 17/08/20

Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es definida positiva si y sólo si puede factorizarse en la forma $L \cdot L^T$, donde L es una matriz triangular inferior con elementos distintos de cero en la diagonal principal.

Verifique si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es siempre definida positiva, con

$a \in \mathbb{R}$, o no.

Solución:

$$\text{Sea } L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}.$$

$$A = L \cdot L^T \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{11}l_{31} & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$l_{11}^2 = 1 \Rightarrow l_{11} = \pm 1$$

$$l_{11}l_{21} = a \Rightarrow l_{21} = \pm a$$

$$l_{11}l_{31} = 0 \Rightarrow l_{31} = 0$$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 1 \Rightarrow l_{22} = 1 - a^2$$

En este punto observamos que $l_{22} = 0$ si $a = 1 \in \mathbb{R}$, por lo tanto, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es definida positiva si $a = 1$, pues en ese caso existiría un elemento de la diagonal principal (l_{22}) igual a cero. \square