UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST N° 7
ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____CARRERA :________
FECHA DE ENTREGA : Viernes 08 de enero hasta las 13:00 horas.
FECHA : Mi 06/01/20

1) El conjunto $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\}$ es siempre base de $\mathbb{R}^3$, si $\boldsymbol{a} = [2, 1, -c]$ y $\boldsymbol{b} = [1, 0, 0]$, con $c \in \mathbb{R}$ constante.

<u>Solución:</u>

Sea $B = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\}$

Tenemos que $dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \#(B)$, por lo que falta mostrar que B es $l.i.$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = [0, -c, -1]$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = [2, 1, -c] - [0, -c, -1] = [2, 1+c, 1-c]$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -c \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1+c & 1-c \end{vmatrix} = -c(1+c) - (1-c) = -c - c^2 - 1 + c = -c^2 - 1$$

$$= -(c^2 + 1) \neq 0$$

B es siempre base de $\mathbb{R}^3$

Respuesta: Verdadero ☐

2) La distancia entre dos matrices simétricas no nulas y distintas, de orden 2, es

<u>Solución:</u>

$$d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & f \\ f & g \end{bmatrix}\right) = \left\| \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d & f \\ f & g \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} a-d & b-f \\ b-f & c-g \end{bmatrix} \right\|$$

$$Traza\left(\begin{bmatrix} a-d & b-f \\ b-f & c-g \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a-d & b-f \\ b-f & c-g \end{bmatrix}\right)$$

$$= Traza\left(\begin{bmatrix} (a-d)^2+(b-f)^2 & \\ & (b-f)^2+(c-g)^2 \end{bmatrix}\right)$$

$= (a-d)^2 + 2(b-f)^2 + (c-g)^2 > 0$, si $a \neq d$ ó $b \neq f$ ó $c \neq g$

Respuesta: siempre un número mayor que 0 ❑

3) La matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, $T(a,b) = ax + b$, considerando las bases $B_1 = \{[1,-1],[1,3]\}$ y $B_2 = \{1, 1+x\}$

Solución:

Calculemos la matriz asociada a T con respecto a las bases B_1 y B_2

$T(1,-1) = x - 1 = a_{11} + a_{21}(1+x) = (a_{11} + a_{21}) + a_{21}x \Rightarrow$

$a_{21} = 1$; $a_{11} = -1 - a_{21} = -1 - 1 = -2$

$T(1,3) = x + 3 = a_{12} + a_{22}(1+x) = (a_{12} + a_{22}) + a_{22}x \Rightarrow$

$a_{22} = 1$; $a_{12} = 3 - a_{22} = 3 - 1 = 2$

Por lo tanto : $[T]_{B_1 B_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$|[T]_{B_1B_2}| = -2 - 2 = -4 \neq 0$

Respuesta: No singular ❑

4) Si $R[1,-1,3] = [1,2,4]$, $R[1,0,1] = [2,-2,2]$ y $R[1,-1,0] = [1,1,1]$, entonces R es

Solución:

Notemos que $R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y además $B = \{[1,-1,3],[1,0,1],[1,-1,0]\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ porque

$dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \#(B)$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 3 + 1 = -3 \neq 0$

$[x,y,z] = \alpha[1,-1,3] + \beta[1,0,1] + \gamma[1,-1,0] \Rightarrow$

$x = \alpha + \beta + \gamma$

$y = -\alpha - \gamma$

$z = 3\alpha + \beta \Rightarrow \beta = z - 3\alpha$

$x = \alpha + z - 3\alpha + \gamma \Rightarrow x - z = \gamma - 2\alpha$

$y = -\alpha - \gamma$
$x - z = \gamma - 2\alpha$

Sumando las ecuaciones anteriores
$x + y - z = -3\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{z-x-y}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y$

$\beta = z - 3\alpha \Rightarrow \beta = z - (z - x - y) \Rightarrow \beta = z - z + x + y \Rightarrow \beta = x + y$

$x - z = \gamma - 2\alpha \Rightarrow \gamma = x - z + 2\alpha \Rightarrow \gamma = x - z + \frac{2}{3}z - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y \Rightarrow$
$\gamma = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}y$

Por otro lado
$[x, y, z] = \alpha[1, -1, 3] + \beta[1, 0, 1] + \gamma[1, -1, 0] \Rightarrow$
$R[x, y, z] = R(\alpha[1, -1, 3] + \beta[1, 0, 1] + \gamma[1, -1, 0]) \Rightarrow$
$R[x, y, z] = \alpha\, R[1, -1, 3] + \beta\, R[1, 0, 1] + \gamma\, R[1, -1, 0] \Rightarrow$
$R[x, y, z] = \alpha\, [1, 2, 4] + \beta\, [2, -2, 2] + \gamma\, [1, 1, 1] \Rightarrow$
$R[x, y, z] = [\alpha + 2\beta + \gamma\, , 2\alpha - 2\beta + \gamma, 4\alpha + 2\beta + \gamma]$

Ahora
$\alpha + 2\beta + \gamma = \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + 2x + 2y + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}y = 2x + y$
$2\alpha - 2\beta + \gamma = \frac{2}{3}z - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - 2x - 2y + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}z - \frac{7}{3}x - \frac{10}{3}y$
$4\alpha + 2\beta + \gamma = \frac{4}{3}z - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}y + 2x + 2y + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}y = z + x$

$R[x, y, z] = [\alpha + 2\beta + \gamma\, , 2\alpha - 2\beta + \gamma, 4\alpha + 2\beta + \gamma]$
$= [2x + y, \frac{1}{3}z - \frac{7}{3}x - \frac{10}{3}y, z + x]$

De lo anterior se tiene que
$R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$R[x, y, z] = [2x + y, \frac{1}{3}z - \frac{7}{3}x - \frac{10}{3}y, z + x]$

Veamos si R es lineal
$i)\, R([x, y, z] + [a, b, c]) = R[x + a, y + b, z + c] =$
$[2(x + a) + (y + b), \frac{1}{3}(z + c) - \frac{7}{3}(x + a) - \frac{10}{3}(y + b), (z + c) + (x + a)]$
$R[x, y, z] + R[a, b, c] =$
$[2x + y, \frac{1}{3}z - \frac{7}{3}x - \frac{10}{3}y, z + x] + [2a + b, \frac{1}{3}c - \frac{7}{3}a - \frac{10}{3}b, c + a] =$
$[2(x + a) + (y + b), \frac{1}{3}(z + c) - \frac{7}{3}(x + a) - \frac{10}{3}(y + b), (z + c) + (x + a)]$

$ii)\; R(\alpha\, [x, y, z]) = R[\alpha x, \alpha y, \alpha z] = [2\alpha x + \alpha y, \frac{1}{3}\alpha z - \frac{7}{3}\alpha x - \frac{10}{3}\alpha y, \alpha z + \alpha x]$
$\alpha R[x, y, z] = \alpha[2x + y, \frac{1}{3}z - \frac{7}{3}x - \frac{10}{3}y, z + x] =$

$[2\alpha x+\alpha y, \frac{1}{3}\alpha z-\frac{7}{3}\alpha x-\frac{10}{3}\alpha y, \alpha z+\alpha x]$

De $i)$ y $ii)$ se tiene que R es lineal.

Calculemos ahora $Nuc(R)$
$Nuc(R)=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3/R[x,y,z]=[0,0,0]\}=$
$\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3/[2x+y, \frac{1}{3}z-\frac{7}{3}x-\frac{10}{3}y, z+x]=[0,0,0]\}$
$2x+y=0\Rightarrow y=-2x$
$\frac{1}{3}z-\frac{7}{3}x-\frac{10}{3}y=0$
$z+x=0\Rightarrow z=-x$

$\frac{1}{3}z-\frac{7}{3}x-\frac{10}{3}y=0\Rightarrow -\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}x+\frac{16}{3}x=0\Rightarrow 8x=0\Rightarrow x=0$
$y=-2x=0$
$z=-x=0$

$Nuc(R)=\{[0,0,0]\}$
Esto muestra que R es inyectivo.

Usemos ahora el teorema de las dimensiones

$dim(V)=dim(Nuc(R))+dim(Rec(R))\Rightarrow$
$dim(\mathbb{R}^3)=dim(Nuc(R))+dim(Rec(R))\Rightarrow 3=0+dim(Rec(R))\Rightarrow$
$dim(Rec(R))=3$

Pero sabemos que $Rec(R)\leq\mathbb{R}^3$, y como ambos conjuntos tienen la misma dimensión se concluye que $Rec(R)=\mathbb{R}^3$, por lo que R es sobreyectiva.

Dado que R es inyectiva y sobreyectiva, es finalmente biyectiva.

Respuesta: un operador lineal biyectivo ❑

5) ¿Cuál (es) de las siguientes funciones es (son) lineal (es) ?

$a)\, T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3, T(x,y)=(x+y, 3x+y, 2y)$

$b)\, f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+1$

$c)\, J:\mathcal{P}_1(\mathbb{R})\to\mathbb{R}, J(ax+b)=a^2+b^2$

$d) R:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ R\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a+b \\ c+d & 0\end{pmatrix}$

Solución:

$a)\, i)\ T((x,y)+(z,w)) = T(x+z, y+w)$
$= (x+z+y+w, 3x+3z+y+w, 2y+2w)$

$T(x,y)+T(z,w) = (x+y, 3x+y, 2y) + (z+w, 3z+w, 2w) =$
$= (x+z+y+w, 3x+3z+y+w, 2y+2w)$

$ii)\, T(\alpha(x,y)) = T(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x + \alpha y, 3\alpha x + \alpha y, 2\alpha y)$
$\alpha T(x,y) = \alpha(x+y, 3x+y, 2y) = (\alpha x + \alpha y, 3\alpha x + \alpha y, 2\alpha y)$
T es lineal

$b)\, f(x+y) = x+y+1$
$f(x)+f(y) = x+1+y+1 = x+y+2$
$f(x+y) \neq f(x)+f(y)$
f no es lineal

$c)\, J((ax+b)+(cx+d)) = J((a+c)x+(b+d)) =$
$(a+c)^2+(b+d)^2$

$J(ax+b)+J(cx+d) = a^2+b^2+c^2+d^2$

$J((ax+b)+(cx+d)) \neq J(ax+b)+J(cx+d)$
J no es lineal

$d)\, i)\, R\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f & g \\ h & k \end{pmatrix}\right) = R\left(\begin{pmatrix} a+f & b+g \\ c+h & d+k \end{pmatrix}\right)$
$= \begin{pmatrix} 0 & a+f+b+g \\ c+h+d+k & 0 \end{pmatrix}$

$R\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + R\begin{pmatrix} f & g \\ h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ c+d & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & f+g \\ h+k & 0 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0 & a+f+b+g \\ c+h+d+k & 0 \end{pmatrix}$

$R\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f & g \\ h & k \end{pmatrix}\right) = R\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + R\begin{pmatrix} f & g \\ h & k \end{pmatrix}$

$ii)\, R\left(\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = R\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a + \alpha b \\ \alpha c + \alpha d & 0 \end{pmatrix}$
$\alpha R\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 0 & a+b \\ c+d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a + \alpha b \\ \alpha c + \alpha d & 0 \end{pmatrix}$
$R\left(\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \alpha R\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
R es lineal

Respuesta: $a)$ y $d)$ $\square$

6) Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, T(x,y)=(x,x+y)$.
La suma de los valores propios de T, con respecto a la base canónica es
Solución:
La base canónicas es $B_1=\{[1,0],\ [0,1]\}\ =B_2$

$$T[1,0]=[1,1+0]=[1,1]=a_{11}[1,0]+a_{21}[0,1]\Rightarrow a_{11}=1\,,\ a_{21}=1$$

$$T[0,1]=[0,0+1]=[0,1]=a_{12}[1,0]+a_{22}[0,1]\Rightarrow a_{12}=0\,,\ a_{22}=1$$

$$\therefore\ [T]_{B_1B_2}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

Para calcular los valores propios de $[T]_{B_1B_2}$ basta observar que es una matriz triangular, y sabemos que los valores propios en una matriz triangular son los elementos de la diagonal principal, es decir, $\lambda_1=1$ y $\lambda_2=1$, luego la suma es 2.
Respuesta: 2 $\square$