UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST N° 5 ÁLGEBRA LINEAL

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA — INGENIERÌA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 30 MINUTOS FECHA : Ju 25/05/17

Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando todas sus respuestas.**

$a)$__F__ Si $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$, entonces $\| \boldsymbol{a} \|^2 + < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} > \neq \frac{3\pi}{\sqrt{2}}$, con $\boldsymbol{a}$ // $[1,1,1]$

Justificación:

Dado que $\boldsymbol{a}$ // $[1,1,1]$, se tiene que $\boldsymbol{a} = \alpha[1,1,1] = [\alpha, \alpha, \alpha]$

Luego

$$\| \boldsymbol{a} \|^2 + < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} > = \| [\alpha, \alpha, \alpha] \|^2 + < [\alpha, \alpha, \alpha], [\alpha, \alpha, \alpha] >$$

$$= \left(\sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2} \right)^2 + \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 = 3\,\alpha^2 + 3\alpha^2 = 6\alpha^2$$

Analicemos, ahora, si existe algún valor para α tal que $\| \boldsymbol{a} \|^2 + < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} > = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}$

$$\| \boldsymbol{a} \|^2 + < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} > = \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow 6\alpha^2 = \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{3\pi}{6\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{\frac{3\pi}{6\sqrt{2}}}$$

Finalmente, existen dos valores para α que muestran que la afirmación es falsa. $\square$

$b)$ ___F__ $B = \{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ es base ortogonal si $\boldsymbol{a} = [1,\ -1, 0]$ y $\boldsymbol{b} = [2,0,1]$

Justificación:

Verifiquemos si B es ortogonal

$$< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} > = < [1,\ -1, 0], [2,0,1] > = 2 + 0 + 0 = 2 \neq 0$$

Esto muestra que B no es ortogonal. $\square$

$c)$ ______ El triángulo de vértices $(1,2,3)$, $(-2,0,-1)$ y $(3,1,2)$ es rectángulo.

Justificación:

Sean $A=(1,2,3)$, $B=(-2,0,-1)$ y $C=(3,1,2)$

Tenemos que

$a \equiv d(A,B)=\sqrt{(-2-1)^2+(0-2)^2+(-1-3)^2}$

$=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+4+16}=\sqrt{29}$

$b \equiv d(A,C)=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}$

$=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

$c \equiv d(B,C)=\sqrt{(3-(-2))^2+(1-0)^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{(3+2)^2+1^2+(2+1)^2}$

$=\sqrt{5^2+1+3^2}=\sqrt{25+1+9}=\sqrt{35}$

Observemos que

$a^2+b^2=29+6=35=c^2$

Esto muestra que se cumple el teorema de pitágoras, es decir, el triángulo es rectángulo.

Otra forma de resolver el mismo ejercicio es calcular los ángulos interiores del triángulo, buscando un ángulo de $90°$

Sean $\boldsymbol{c}= B-A=[-3,-2,-4]$ y $\boldsymbol{b}=C-A=[2,-1,-1]$

Luego

$$cos(\alpha)=\frac{<\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}>}{\|\boldsymbol{c}\|\|\boldsymbol{b}\|}=\frac{<[-3,-2,-4],[2,-1,-1]>}{\|\boldsymbol{c}\|\|\boldsymbol{b}\|}=\frac{-6+2+4}{\|\boldsymbol{c}\|\|\boldsymbol{b}\|}=\frac{0}{\|\boldsymbol{c}\|\|\boldsymbol{b}\|}=0 \Rightarrow \alpha=90°$$

Esto muestra que el triángulo es rectángulo.

Una última forma de mostrar lo mismo es notar que $<\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}>=0$, es decir, los vectores $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares, y como representan dos aristas del triángulo, concluimos que uno de los ángulos interiores es $90°$ $\square$

(60 $\boldsymbol{puntos}$)