UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST N° 5 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS FECHA : Ma 18/11/25

1) Con respecto a la tarea de las 60 aplicaciones del Álgebra Lineal, de las 10 elegidas por usted, describa una que le pareció interesante indicando los temas del álgebra lineal relacionados.

(**20 puntos**)

Solución:
Una de las aplicaciones más importantes del álgebra lineal en juegos 3D es la representación y transformación de objetos y cámaras en el espacio tridimensional, usando vectores y matrices.

Temas de álgebra lineal involucrados.
Los principales temas de álgebra lineal aplicados en este contexto incluyen:
Vectores: Para posiciones, velocidades, aceleraciones y movimientos.
Matrices: Para realizar transformaciones (rotación, escalado, traslación).
Producto punto y producto cruz: Para cálculos de iluminación, orientación, normales de superficie y colisiones físicas.
Determinantes: Para entender la orientación y el volumen, así como para detectar colisiones y calcular áreas o volúmenes en 3D.
Espacios vectoriales: Fundamento para trabajar con combinaciones lineales y cambiar de base (por ejemplo, sistemas de coordenadas locales y globales)

Observación: Lo anterior es un ejemplo del tipo de respuesta requerida. ❑

2) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

$a)$ __F____ El operador $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f[x,y]=3x+2y,$ es inyectivo.
Justificación:
Primero debemos probar que f es lineal.
$f(\alpha \boldsymbol{v}_1+\beta \boldsymbol{v}_2)=f(\alpha[a,b]+\beta\,[c,d])=f([\alpha a,\alpha b]+\ [\beta c,\beta d])=$
$f[\alpha a+\beta c,\alpha b+\beta d]=3(\alpha a+\beta c)+2(\alpha b+\beta d)$

$\alpha f(\boldsymbol{v}_1) + \beta f(\boldsymbol{v}_2) = \alpha f([a,b]) + \beta f([c,d]) = \alpha(3a+2b) + \beta\,(3c+2d) =$
$3(\alpha a + \beta c) + 2(\alpha b + \beta d)$

Esto muestra que $f(\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2) = \alpha f(\boldsymbol{v}_1) + \beta f(\boldsymbol{v}_2)$, por lo que f es lineal.
Calculemos el núcleo de f :
$Nuc(f) = \{[x,y]/f[x,y] = 0\} = \{[x,y]/3x+2y=0\} = \{[x,y]/x = -\frac{2}{3}y\} =$
$\{[-\frac{2}{3}y, y], y \in \mathbb{R}\} \neq \{[0,0]\}$
Esto muestra que f no es inyectiva. $\square$

$b)$ ___V___ Si $R(A) = A \cdot M$, con $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, entonces la aplicación lineal R posee inversa, con $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
Justificación:
Nos dicen que R es lineal.
Notemos que $|\,M\,| = 0+1 = 1 \neq 0.$ Esto significa que M^{-1} existe.
Calculemos $Nuc(R)$
$Nuc(R) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})/R(A) = \Theta\} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})/A \cdot M = \Theta\} =$
$\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})/A \cdot M \cdot M^{-1} = \Theta \cdot M^{-1}\} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})/A \cdot (M \cdot M^{-1}) = \Theta \cdot M^{-1}\}$
$= \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})/A \cdot I = \Theta\} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})/A = \Theta\} = \{\Theta\}$
Esto muestra que R es inyectiva y además $dim(Nuc(R)) = 0$
Recordemos que : $dim(Nuc(R)) + dim(Rec(R)) = dim(V)$
$dim(Nuc(R)) + dim(Rec(R)) = dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) \Rightarrow 0 + dim(Rec(R)) = 4 \Rightarrow$
$dim(Rec(R)) = 4$
Dado que $dim(Cod(R)) = dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4 = dim(Rec(R))$, tenemos que $Rec(R) = Cod(R)$, es decir, R es sobreyectiva.
Como R es inyectiva y sobreyectiva, se concluye que R es biyectiva, es decir, R posee inversa. $\square$

(40 puntos)