

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

**PAUTA TEST N° 4 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA
AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA**

NOMBRE: _____ **CARRERA :** _____

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 45 MINUTOS

FECHA : Lu 06/07/20

a) F La recta que es paralela a $\frac{x-1}{3} = 1 - y = \frac{-4z+2}{2}$ y que pasa por el punto $(1, -1, 0)$, forma un ángulo obtuso con el plano $x + y + z = 1$

Justificación:

Determinemos el vector director de la recta dada.

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{3} = 1 - y = \frac{-4z+2}{2} &\Rightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{-\frac{1}{4}(-4z+2)}{-\frac{1}{4}(2)} \Rightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} \\ &= \frac{z-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que el vector director es $\mathbf{r} = \left[3, -1, -\frac{1}{2} \right]$

El vector normal del plano es $\mathbf{n} = [1, 1, 1]$

Ahora, el ángulo entre una recta y un plano es $\alpha = 90^\circ - \angle(\mathbf{r}, \mathbf{n})$

$$\alpha = 90^\circ - \angle(\mathbf{r}, \mathbf{n}) \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \text{Arccos}\left(\frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle}{\|\mathbf{r}\| \|\mathbf{n}\|}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = 90^\circ - \text{Arccos}\left(\frac{\langle [3, -1, -\frac{1}{2}], [1, 1, 1] \rangle}{\|[3, -1, -\frac{1}{2}]\| \|[1, 1, 1]\|}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = 90^\circ - \text{Arccos}\left(\frac{3-1-\frac{1}{2}}{\sqrt{9+1+\frac{1}{4}}\sqrt{1+1+1}}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = 90^\circ - \text{Arccos}\left(\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{41}{4}}\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \alpha = 90^\circ - 74^\circ 18' 21.33''$$

$$\Rightarrow \alpha = 15^\circ 41' 38.67'' < 90^\circ$$

Àngulo obtuso es el que tiene más de 90 grados. $\square$

b) V La distancia de $\frac{3x-1}{3} = \frac{2-2y}{6} = 4z+1$ al punto $(-1, 2, 0)$ es mayor que la distancia de $3x-2y=4z+2y-2$ al punto $(-1, -1, 1)$

Justificación:

Calculemos, en primer lugar, la distancia de la recta al punto dado.

$$\frac{3x-1}{3} = \frac{2-2y}{6} = 4z+1 \Rightarrow \frac{x-\frac{1}{3}}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}$$

El vector director es $\mathbf{r} = \left[1, -3, \frac{1}{4}\right]$

Un punto de la recta puede ser $P_0 = \left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{4}\right)$

El punto A dado es $(-1, 2, 0)$

El vector $\overrightarrow{P_0A} = \left[-\frac{4}{3}, 1, \frac{1}{4} \right]$

Luego

$$\mathbf{r} \times \overrightarrow{P_0A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -3 & \frac{1}{4} \\ -\frac{4}{3} & 1 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \left[-1, -\frac{7}{12}, -3 \right]$$

$$\|\mathbf{r} \times \overrightarrow{P_0A}\| = \sqrt{1 + \frac{49}{144} + 9} = \frac{\sqrt{1489}}{12}$$

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{1 + 9 + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{161}}{4}$$

$$d(\text{Recta}, A) = \frac{\|\mathbf{r} \times \overrightarrow{P_0A}\|}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{\frac{\sqrt{1489}}{12}}{\frac{\sqrt{161}}{4}} \approx 1.01$$

Calculemos ahora la distancia del plano al punto dado.

$$3x - 2y = 4z + 2y - 2 \Rightarrow 3x - 4y - 4z = -2$$

El vector normal es $\mathbf{n} = [3, -4, -4]$

Un punto del plano, considerando $x = 0$ y $y = 0$, es

$$P_0 = \left(0, 0, \frac{1}{2} \right)$$

El punto A dado es $(-1, -1, 1)$

$$\text{El vector } \overrightarrow{P_0A} = \left[-1, -1, \frac{1}{2} \right]$$

Luego

$$\left| \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{P_0A} \rangle \right| = \left| \langle [3, -4, -4], \left[-1, -1, \frac{1}{2} \right] \rangle \right| = |-3 + 4 - 2| = 1$$

$$\|\mathbf{n}\| = \|[3, -4, -4]\| = \sqrt{9 + 16 + 16} = \sqrt{41}$$

$$d(\text{Plano}, A) = \frac{|\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{P_0A} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{41}} \approx 0.16$$

Finalmente $d(Recta, A) \approx 1.01 > d(Plano, A) \approx 0.16$ $\square$

c) F El valor de c de modo que el ángulo entre los vectores $[1, 2, 1]$ y $[1, 0, c]$ sea igual a 60° es un número entero.

Justificación:

Recordemos que : $\cos(\alpha) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$, donde α es el ángulo entre los vectores a y b .

$$\langle a, b \rangle = \langle [1, 2, 1], [1, 0, c] \rangle = 1 + c$$

$$\|a\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\|b\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + c^2} = \sqrt{1 + c^2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|} \Rightarrow \cos(60^\circ) = \frac{1+c}{\sqrt{6} \sqrt{1+c^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1+c}{\sqrt{6+6c^2}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{6+6c^2} = 2+2c$$

$$\Rightarrow 6+6c^2 = 4+8c+4c^2 \Rightarrow 2c^2-8c+2=0 \Rightarrow$$

$$c^2-4c+1=0$$

$$c = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} \Rightarrow c = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \Rightarrow c = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow$$

$c_1 = 2 + \sqrt{3}$; $c_2 = 2 - \sqrt{3}$ que no son números enteros, sino irracionales. $\square$