UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST N° 4 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS FECHA : Ma 04/11/25

Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

$a)$ __V____Si $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ son vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$, entonces $\|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}\|^2 + <\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}>^2 = 1$
Justificación:
Dado que $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ son vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$ se tiene que $\|\boldsymbol{p}\| = 1$ y $\|\boldsymbol{q}\| = 1$

Ahora, recordemos que

$$sen(\alpha) = \frac{\|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}\|}{\|\boldsymbol{p}\|\|\boldsymbol{q}\|} = \|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}\|$$

$$cos(\alpha) = \frac{<\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}>}{\|\boldsymbol{p}\|\|\boldsymbol{q}\|} = <\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}>$$

Luego : $\|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}\|^2 + <\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}>^2 = sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$ ❏

$b)$ ___V___ $dim(T) = 3$, si $T = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / Traza(A) = 0\}$ es un subespacio vectorial
Justificación:
Nos dicen que T es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, por lo que no es necesario probarlo.

$$T = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / Traza(A) = 0\} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\right\} =$$
$$\left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

Observamos que $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ es una posible base para T

Falta probar que es l.i.

$$a\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & -a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$a=0,\ b=0,\ c=0$

Esto muestra que B es l.i. y dado que cualquier matriz de B se puede escribir comocombinación lineal de los vectores de B, se concluye que B es base de T. Es decir, $dim(T)=3$ ❑

$c)$ ___F___ Todas las bases ortogonales de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ son múltiplo escalar de la base canónica de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$

Justificación:

Consideremos $B=\{1+x,1-x\}$

$dim(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}))=2=\#(B)$

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0$$

Lo anterior muestra que B es base de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$

Ahora, $<1+x,1-x> \,=1(1)+1(-1)=0$, es decir, los vectores de B son ortogonales.

De lo anterior se tiene que B es base ortogonal de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, pero no es múltiplo escalar de la base canónica $C=\{1,x\}$

$B=\{1+x,1-x\}\neq\alpha C=\{\alpha,\alpha x\},\ \alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$ ❑

(60 puntos)