

PAUTA TEST N° 4 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS **FECHA : Lu 04/11/24**

Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) V

$[1, 3, 5, -1] \in \langle \{[2, -1, 3, 1], [2, 2, -2, 4], [-1, 1, -1, 1], [2, 1, -1, 3]\} \rangle$
(30 puntos)

Justificación:

Escribamos el sistema en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 & | & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & | & 3 \\ 3 & -2 & -1 & -1 & | & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{14}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 & | & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & | & 3 \\ 3 & -2 & -1 & -1 & | & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow F_1(1)+F_2; F_1(-3)+F_3; F_1(-2)+F_4 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 & | & -1 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & | & 2 \\ 0 & -14 & -4 & -10 & | & 8 \\ 0 & -6 & -3 & -4 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow F_2(14/6)+F_3; F_2(1)+F_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 & | & -1 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2/3 & -2/3 & | & 38/3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 & | & -1 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & | & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2/3 & -2/3 & | & 38/3 \end{pmatrix} \rightarrow F_4(3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 & | & -1 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & | & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & | & 38 \end{pmatrix} \rightarrow F_3(2)+F_4 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 & | & -1 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & | & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 48 \end{pmatrix}$$

Observamos que $r_A = r_{Ab} = 4 = N$. Esto muestra que existe una solución, por lo que el vector dado se puede escribir como combinación lineal de los vectores del conjunto $\{[2, -1, 3, 1], [2, 2, -2, 4], [-1, 1, -1, 1], [2, 1, -1, 3]\}$ $\square$

b) F $3x^2 - x^3 + x^2 - 5x + 6 \in \langle \{1 - x + x^3, 2 - x^2, x - 4x^2 + 3 + 2x^3\} \rangle$
(30 puntos)

Justificación:

Observemos, en primer lugar, que el vector $3x^2 - x^3 + x^2 - 5x + 6$, es realmente $6 - 5x + 4x^2 - x^3$

Luego, tenemos que

$$6 - 5x + 4x^2 - x^3 = \alpha_1(1 - x + x^3) + \alpha_2(2 - x^2) + \alpha_3(3 + x - 4x^2 + 2x^3) \Rightarrow$$

$$6 - 5x + 4x^2 - x^3 = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3) + (-\alpha_1 + \alpha_3)x + (-\alpha_2 - 4\alpha_3)x^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_3)x^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 6 & (1) \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = -5 & (2) \\ -\alpha_2 - 4\alpha_3 = 4 & (3) \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = -1 & (4) \end{cases}$$

$$\text{De (4): } \alpha_1 = -1 - 2\alpha_3$$

$$\text{Reemplazando en (2): } -\alpha_1 + \alpha_3 = -5 \Rightarrow 1 + 2\alpha_3 + \alpha_3 = -5 \Rightarrow 3\alpha_3 = -6 \Rightarrow \alpha_3 = -2$$

$$\text{Ahora, } \alpha_1 = -1 - 2\alpha_3 = -1 - 2(-2) = -1 + 4 = 3$$

$$\text{De (3): } -\alpha_2 - 4\alpha_3 = 4 \Rightarrow \alpha_2 = -4 - 4\alpha_3 = -4 - 4(-2) = -4 + 8 = 4$$

$$\text{De (1): } \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 3 + 2(4) + 3(-2) = 3 + 8 - 6 = 3 + 2 = 5 \neq 6$$

Esto muestra que no existen escalares α_1, α_2 y α_3 de modo que el vector $3x^2 - x^3 + x^2 - 5x + 6$ sea combinación lineal de los vectores del conjunto $\{1 - x + x^3, 2 - x^2, x - 4x^2 + 3 + 2x^3\}$ $\square$