

PAUTA TEST N° 4 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 30 MINUTOS **FECHA : Lu 08/06/26**

Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) F Si $A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, entonces $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A$

Justificación:

Veamos si existen escalares α_1 y α_2 tales que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = -1$$

$$-\alpha_1 = 2 \Rightarrow \alpha_1 = -2$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_2 = 1$$

De las dos primeras ecuaciones observamos que el sistema no posee solución, pues α_1 no puede ser igual a -1 y a la vez ser igual a -2 . $\square$

b) F Los vectores propios de $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ forman una base para $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Justificación:

Los vectores propios de una matriz de orden 2 son matrices de orden 2×1 , por lo que no pueden formar parte de una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, en donde existen sólo matrices cuadradas de orden 2. $\square$

c) V Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $\frac{1}{2}(A + A^T)$ es ortogonal con $\frac{1}{2}(A - A^T)$

Justificación:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos el producto interno entre estas matrices, recién obtenidas.

$$\begin{aligned} &< \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} > = \\ &\frac{1}{4} < \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} > = \\ &\frac{1}{4} \text{Traza} \left[\begin{pmatrix} 0 & c-b \\ b-c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix} \right] = \\ &\frac{1}{4} \text{Traza} \left[\begin{pmatrix} (c-b)(c+b) & \\ & (b-c)(b+c) \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4}(c-b)(c+b) + (b-c)(b+c) = \\ &\frac{1}{4}(c+b)[c-b+b-c] = \frac{1}{4}(c+b)[0] = 0 \end{aligned}$$

Esto muestra que las matrices $\frac{1}{2}(A + A^T)$ y $\frac{1}{2}(A - A^T)$ son ortogonales. $\square$

d) V $\{[a, 1, 0] \times [1, 1, -1], < [2, 1], [3, -2] > \cdot [3, a, 1], [1, -1, -a]\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, para cada $a \in \mathbb{R}$

Justificación:

Sea $B = \{[a, 1, 0] \times [1, 1, -1], < [2, 1], [3, -2] > \cdot [3, a, 1], [1, -1, -a]\}$

Tenemos que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \#(B)$. Falta probar que B es l.i.

$$[a, 1, 0] \times [1, 1, -1] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [-1, a, a-1]$$

$$< [2, 1], [3, -2] > \cdot [3, a, 1] = (6-2) \cdot [3, a, 1] = 4 \cdot [3, a, 1] = [12, 4a, 4]$$

Calculemos la determinante de los vectores de B dispuestos como filas

$$\begin{vmatrix} -1 & a & a-1 \\ 12 & 4a & 4 \\ 1 & -1 & -a \end{vmatrix} = 4a^2 + 4a - 12a + 12 - 4a^2 + 4a - 4 + 12a^2 =$$

$$12a^2 - 4a + 8 = 0 \Rightarrow 3a^2 - a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \in \mathbb{C}$$

Esto muestra que no importando el valor de a , la determinante siempre será distinta de cero, es decir, B es base de $\mathbb{R}^3$, para cada $a \in \mathbb{R}$ $\square$

(60 puntos)