

PAUTA TEST N° 4 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL – INGENIERÍA
AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA – INGENIERÍA EN
ALIMENTOS

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS **FECHA : Ju 27/04/17**

Resuelva, si es posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $x - y + az = 1$
 $x + z = 3$
 $-2x + 3y - z = 1 - x$

con a constante real.

b) $t - w = v + 4z$
 $w = 3t + 6v$

c) $2x + y = 4$
 $-4x - 2y = -6$
 $x + 5y = -1$

(60 puntos).

Solución:

a) $x - y + az = 1$
 $x + z = 3$
 $-2x + 3y - z = 1 - x$

Reordenando

$$\begin{aligned}x - y + az &= 1 \\x + z &= 3 \\-x + 3y - z &= 1\end{aligned}$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Trabajemos con la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_1(-1)+F_2; F_1+F_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 2 \\ 0 & 2 & a-1 & 2 \end{array} \right] \rightarrow F_2(-2)+F_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 2 \\ 0 & 0 & 3a-3 & -2 \end{array} \right]$$

Caso 1: $3a - 3 = 0 \Rightarrow a = 1$

En este caso $r_A = 2 \neq r_{Ab} = 3$, es decir, si $a = 1$ no existe solución.

Caso 2: $3a - 3 \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$

En este caso $r_A = 3 = r_{Ab} = n$, es decir, si $a \neq 1$ existe única solución.

Obtengamos la solución en este caso.

De la matriz ya triangulada tenemos que

$$(3a - 3)z = -2 \Rightarrow z = -\frac{2}{3a-3} = \frac{2}{3-3a}$$

$$y + (1 - a)z = 2 \Rightarrow y = 2 - (1 - a)z \Rightarrow y = 2 - (1 - a)\frac{2}{3-3a} \Rightarrow$$

$$y = 2 - \frac{2-2a}{3-3a} \Rightarrow y = \frac{6-6a-2+2a}{3-3a} \Rightarrow y = \frac{4-4a}{3-3a} \Rightarrow y = \frac{4(1-a)}{3(1-a)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

$$x - y + az = 1 \Rightarrow x = 1 + y - az \Rightarrow x = 1 + \frac{4}{3} - a\frac{2}{3-3a} \Rightarrow x = \frac{7}{3} - \frac{2a}{3-3a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7(1-a)-2a}{3(1-a)} \Rightarrow x = \frac{7-7a-2a}{3-3a} \Rightarrow x = \frac{7-9a}{3-3a}$$

Finalmente, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7-9a}{3-3a} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3-3a} \end{bmatrix}$, con $a \neq 1$ $\square$

$$\begin{aligned} b) \quad t - w &= v + 4z \\ w &= 3t + 6v \end{aligned}$$

Reordenando

$$\begin{aligned} t - w - v - 4z &= 0 \\ 3t - w + 6v &= 0 \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ w \\ v \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Trabajemos con la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow F_1(-3)+F_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 12 & 0 \end{array} \right]$$

Notamos que $r_A = 2 = r_{Ab} < n = 4$. Luego debemos fijar $n - r_A = 4 - 2 = 2$ incógnitas.

Fijemos, por ejemplo, v y z . Del sistema ya escalonado, se tiene

$$2w + 9v + 12z = 0 \Rightarrow 2w = -9v - 12z \Rightarrow w = \frac{-9v-12z}{2} \Rightarrow w = -\frac{9v}{2} - 6z$$

$$t - w - v - 4z = 0 \Rightarrow t = w + v + 4z \Rightarrow t = \frac{-9v-12z}{2} + v + 4z$$

$$\Rightarrow t = -\frac{9v}{2} - 6z + v + 4z \Rightarrow t = -\frac{7v}{2} - 2z$$

$$\text{Finamente, } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ w \\ v \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7v}{2} - 2z \\ -\frac{9v}{2} - 6z \\ v \\ z \end{bmatrix}, \text{ con } v, z \in \mathbb{R} \quad \square$$

$$\begin{aligned} c) \quad 2x + y &= 4 \\ -4x - 2y &= -6 \\ x + 5y &= -1 \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Trabajemos con la ampliada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & -6 \\ 1 & 5 & -1 \end{array} \right] \rightarrow F_{13} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & -1 \\ -4 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right] \rightarrow F_1(4)+F_2; F_1(-2)+F_3$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 18 & -10 \\ 0 & -9 & 6 \end{array} \right] \rightarrow F_2(1/2)+F_3 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 18 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Observamos que $r_A = 2 \neq r_{Ab} = 3$. Esto muestra que el sistema dado no posee solución. $\square$