

PAUTA TEST N° 3 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 30 MINUTOS **FECHA : Lu 07/10/24**

Calcule los valores y vectores propios de $A = \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix}$, con $a \neq 0$ constante real.

(60 puntos)

Solución:

Calculemos los valores propios

$$\begin{vmatrix} a-x & -a \\ -a & a-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-x)(a-x) - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 - 2ax + x^2 - a^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2ax = 0 \Rightarrow x(x-2a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2a \end{cases}$$

Calculemos los vectores propios

Para $x_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} a-x_1 & -a \\ -a & a-x_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} F \\ B \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix} \begin{bmatrix} F \\ B \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow aF - aB = 0 \Rightarrow \text{Fijemos } B \quad aF = aB \Rightarrow a \neq 0 \quad F = B$$

Luego, los vectores propios asociados a $x_1 = 0$ tienen la forma $\begin{bmatrix} F \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}$,

$B \neq 0$

Para $x_2 = 2a$:

$$\begin{pmatrix} a-x_2 & -a \\ -a & a-x_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-2a & -a \\ -a & a-2a \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a & -a \\ -a & -a \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -aC - aD = 0 \Rightarrow \text{Fijemos } D \quad aC = -aD \Rightarrow a \neq 0 \quad C = -D$$

Luego, los vectores propios asociados a $x_2 = 2a$ tienen la forma

$$\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D \\ D \end{bmatrix}, D \neq 0 \quad \square$$