UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST N° 3 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS FECHA : Ma 25/10/22

Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

$a)$ ___V___ Sea P el punto de intersección entre el plano que pasa por los puntos $(1,0,2)$, $(0,-1,3)$ y $(0,1,-3)$, y la recta $2x+1=t$, $6-3y=3t$, $t-z=1$. Luego la distancia de P al punto $(1,1,1)$ es igual a $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Justificación:

Sean $A=(1,0,2)$, $B=(0,-1,3)$ y $C=(0,1,-3)$

$\boldsymbol{a}=A-B=[1,1,-1]$

$\boldsymbol{b}=C-B=[0,2,-6]$

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -6\end{vmatrix}=[-4,6,2]$$

La ecuación del plano es $-4(x-1)+6(y-0)+2(z-2)=0$; es decir,

$-4x+4+6y+2z-4=0 \Rightarrow -4x+6y+2z=0 \Rightarrow 4x-6y-2z=0$

De la recta se tiene:

$x=\frac{1}{2}(t-1)=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$

$y=\frac{6-3t}{3}=2-t$

$z=t-1$

Reemplazando lo anterior en la ecuación del plano:

$4x-6y-2z=0 \Rightarrow 4\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\right)-6\left(2-t\right)-2(t-1)=0 \Rightarrow$

$2t-2-12+6t-2t+2=0 \Rightarrow 6t=12 \Rightarrow t=2$

Reemplazando en las ecuaciones paramétricas de la recta se obtiene el punto $P=\left(\frac{1}{2}2-\frac{1}{2},2-2,2-1\right)=\left(\frac{1}{2},0,1\right)$

Finalmente, la distancia d de P al punto $(1,1,1)$ es

$$d=\sqrt{(1-\tfrac{1}{2})^2+1+0}=\sqrt{\tfrac{1}{4}+1}=\sqrt{\tfrac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \square$$

$b)$ ___F___ La proyección del vector normal al plano $3x + y = z - 1$ sobre el vector director de la recta $3 - x = 2 - 4y = 6z + 1$, es ortogonal con el vector $[3, 2, -6]$

Justificación:

El vector normal al plano $3x + y - z = -1$ es $\boldsymbol{n} = [3, 1, -1]$

El vector director lo obtendremos igualando las ecuaciones dadas a un parámetro t

$3 - x = t \Rightarrow x = 3 - t$

$2 - 4y = t \Rightarrow 4y = 2 - t \Rightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\, t$

$6z + 1 = t \Rightarrow 6z = t - 1 \Rightarrow z = \frac{1}{6}\, t - \frac{1}{6}$

De las ecuaciones paramétricas notamos que el vector director $r = [-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}]$

La proyección del vector normal sobre el vector director es

$$proy_{\boldsymbol{r}}\, \boldsymbol{n} = \frac{<\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}>}{\|\boldsymbol{r}\|^2}\, \boldsymbol{r} = \frac{<[3,1,-1],[-1,-\frac{1}{4},\frac{1}{6}]>}{\left\| [-1,-\frac{1}{4},\frac{1}{6}] \right\|^2}\, [-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}] =$$

$$\frac{-3-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}}\, [-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}] = \frac{-\frac{41}{12}}{\frac{157}{144}}\, [-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}] = -\frac{492}{157}\, [-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}]$$

Veamos si la proyección es ortogonal con $[3, 2, -6]$

$$< [\tfrac{492}{157}, \tfrac{123}{157}, -\tfrac{82}{157}], [3, 2, -6] > \; = \frac{1476}{157} + \frac{246}{157} + \frac{492}{157} \neq 0$$

Esto muestra que los vectores no son ortogonales. $\square$

(60 puntos)