

PAUTA TEST N° 3 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ CARRERA: _____
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS FECHA : Ma 08/05/22

Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando su respuesta.

1) F La distancia del punto $(1, 1, -1)$ a la recta $x = 1 + p, 3y = p, z + 3 = 2p$, es mayor que la distancia del punto $(2, 0, a)$, al plano $3x - y + z = a$, con $a > 1$.

(30 puntos)

Justificación:

Calculemos en primer lugar la distancia del punto $A = (1, 1, -1)$ a la recta dada L .

Recordemos que $d(A, L) = \frac{\| \mathbf{r} \times \mathbf{P_0A} \|}{\| \mathbf{r} \|}$

Obtengamos un punto de la recta. Para ello, consideremos, por ejemplo, $p = 0$.

Luego $P_0 = (1, 0, -3)$

Así $\mathbf{P_0A} = [0, 1, 2]$

Determinemos el vector director de la recta

$x - 1 = p, y = \frac{1}{3}p, z + 3 = 2p$

Se observa que $\mathbf{r} = [1, \frac{1}{3}, 2]$

Calculemos ahora el producto cruz

$$\mathbf{r} \times \mathbf{P_0A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = [\frac{2}{3} - 2, -2, 1] = [-\frac{4}{3}, -2, 1]$$

Calculemos las normas

$$\| \mathbf{r} \times \mathbf{P_0A} \| = \sqrt{\frac{16}{9} + 4 + 1} = \sqrt{\frac{16}{9} + 5} = \sqrt{\frac{61}{9}} = \frac{\sqrt{61}}{3}$$

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{1 + \frac{1}{9} + 4} = \sqrt{5 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{46}{9}} = \frac{\sqrt{46}}{3}$$

De todo lo anterior, se tiene que $d(A, L) = \frac{\|\mathbf{r} \times \mathbf{P_0A}\|}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{\frac{\sqrt{61}}{3}}{\frac{\sqrt{46}}{3}} = \sqrt{\frac{61}{46}} \approx 1.15$

Calculemos en segundo lugar la distancia del punto $B = (2, 0, a)$, al plano π dado.

Recordemos que $d(B, \pi) = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{P_0B}|}{\|\mathbf{n}\|}$

Para obtener un punto P_0 del plano, hacemos $x = 0 = y$ y despejamos z de la ecuación $3x - y + z = a$

$$3(0) - 0 + z = a \Rightarrow z = a$$

Luego $P_0 = (0, 0, a)$

De donde, $\mathbf{P_0B} = [2, 0, 0]$

Observando la ecuación del plano dado se concluye que $\mathbf{n} = [3, -1, 1]$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P_0B} = 6 + 0 + 0 = 6$$

Por otro lado $\|\mathbf{n}\| = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11}$

Por lo tanto, $d(B, \pi) = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{P_0B}|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{6}{\sqrt{11}} \approx 1.81$

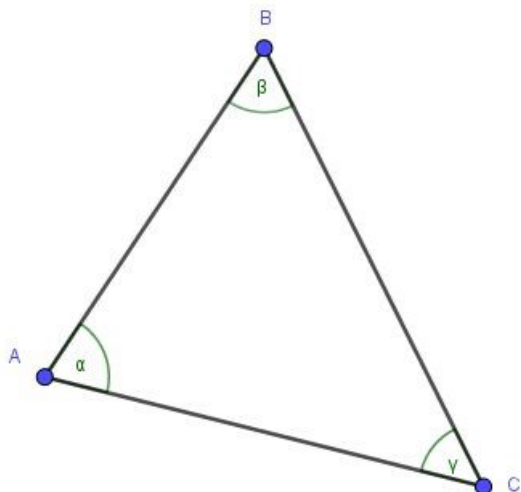
Finalmente, $d(B, \pi) \approx 1.81 > d(A, L) \approx 1.15$ $\square$

2) **___F___** El triángulo de vértices $(1, -1, 2)$, $(0, 1, -2)$ y $(3, 2, -1)$, posee uno de sus ángulos interiores igual a 75°

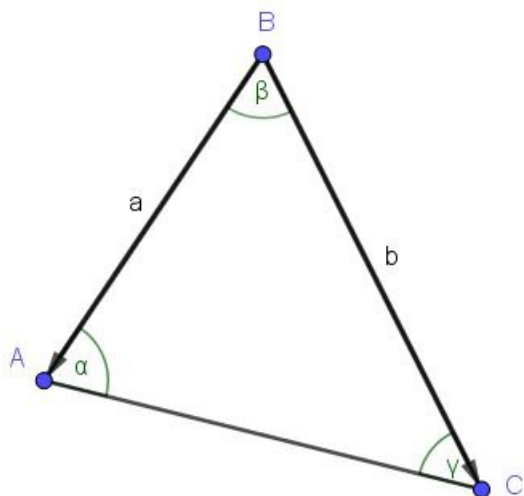
(30 puntos)

Justificación:

Sean $A = (1, -1, 2)$, $B = (0, 1, -2)$ y $C = (3, 2, -1)$

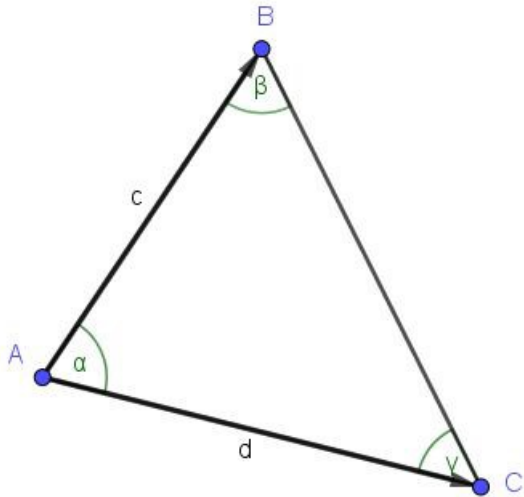


Tenemos que $\mathbf{a} = A - B = [1, -2, 4]$ y $\mathbf{b} = C - B = [3, 1, 1]$



$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{[1, -2, 4] \cdot [3, 1, 1]}{\|[1, -2, 4]\| \|[3, 1, 1]\|} = \frac{3 - 2 + 4}{\sqrt{1+4+16} \sqrt{9+1+1}} = \frac{5}{\sqrt{21} \sqrt{11}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{231}} \Rightarrow \beta = \text{Arccos}\left(\frac{5}{\sqrt{231}}\right) \approx 70.79^\circ \end{aligned}$$

Tenemos que $\mathbf{c} = B - A = [-1, 2, -4]$ y $\mathbf{d} = C - A = [2, 3, -3]$



$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{c}\| \|\mathbf{d}\|} = \frac{[-1, 2, -4] \cdot [2, 3, -3]}{\|[-1, 2, -4]\| \|[2, 3, -3]\|} = \frac{-2+6+12}{\sqrt{1+4+16} \sqrt{4+9+9}} = \frac{16}{\sqrt{21} \sqrt{22}} \\ &= \frac{16}{\sqrt{462}} \Rightarrow \alpha = \text{Arccos}\left(\frac{16}{\sqrt{462}}\right) \approx 41.89^\circ \end{aligned}$$

Esto muestra que uno de los ángulos interiores del triángulo considerado no puede ser 75° , pues $75^\circ + 41.89^\circ + 70.79^\circ = 183.68^\circ > 180^\circ$ $\square$