UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST N° 3 COEF. 2 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA — INGENIERÌA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA FECHA : Mi 29/03/17

Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando todas sus respuestas.**

$a)$__F___ Una matriz cuadrada es ortogonal cuando $A^{-1} = A^T$.
La suma de dos matrices ortogonales es siempre ortogonal.
Justificación:

Por ejemplo, la idéntica de orden 2 es ortogonal, pues $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

Pero $B = I_2 + I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ no es ortogonal, pues

$$B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \neq B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Luego hemos mostrado que la suma de dos matrices ortogonales no siempre es ortogonal. $\square$

$b)$ ___F__ Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ y $B = (b_{ij})_3$, con $b_{ij} = cos((i+j)\frac{\pi}{2})$,
entonces $(A^T + B^{-1})^{-1}$ es simétrica
Justificación:

Tenemos que $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Además $|\,B\,| = 1 - 1 = 0$

Lo anterior muestra que B^{-1} no existe por lo que no tiene sentido calcular lo pedido. $\square$

$c)$ ___F___ Dos matrices A y B conmutan si $A \cdot B = B \cdot A$
Si dos matrices A y B, no nulas ni idénticas, conmutan, entonces $B + A^T = \Theta$
Justificación:
Sean $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $a \neq 0$ y $B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $b \neq 0$

Tenemos que

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ba & 0 \\ 0 & ba \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}$$

Lo anterior muestra que las matrices conmutan, pero

$$B + A^T = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+a & 0 \\ 0 & b+a \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pues a y b son constantes distintas de cero. $\square$

$d)$ __F___ $|\,3A^{-1} \cdot B \cdot\, (3A^{-1})^T| = 1$, si $|\,A\,| = 2$ y $|\,B\,| = 9$
Justificación:
$|\,3A^{-1} \cdot B \cdot\, (3A^{-1})^T| = |\,3A^{-1}||\,B||\,(3A^{-1})^T| = 3^n|\,A^{-1}|9|\,(3A^{-1})^T|$

$$= 3^n \frac{1}{|\,A\,|} 9|\,3A^{-1}| = 3^n \frac{1}{2} 9 \cdot\, 3^n|A^{-1}| = 3^{2n} \cdot \frac{9}{2} \frac{1}{|\,A\,|} = 3^{2n} \cdot \frac{9}{4}$$

Ahora si $n = 2$, se tiene que $|\,3A^{-1} \cdot B \cdot\, (3A^{-1})^T| = 3^4 \cdot \frac{9}{4} = \frac{729}{4} \neq 1$ $\square$

(60 puntos).