

PAUTA TEST N° 2 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS **FECHA : Lu 05/10/26**

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando su respuesta.

 V Los valores propios de una matriz antisimétrica no nula de orden 2, son siempre complejos

Justificación:

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, con $a \neq 0$, una matriz antisimétrica no nula de orden 2.

Calculemos los valores propios de A

$$\begin{vmatrix} -x & a \\ -a & -x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 + a^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -a^2$$

Notemos que $-a^2$ es negativa, pues a es distinta de cero.

Luego

$$x^2 = -a^2 \Rightarrow x = \pm |a| i \in \mathbb{C} \quad \square$$

(30 puntos)

2) Calcule los valores y vectores propios para la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

Calculemos los valores propios de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-x)(-x) - 1 = 0 \Rightarrow -x + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Calculemos los vectores propios

Para $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1-x_1 & -1 \\ -1 & -x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Elegimos la primera fila y fijamos la variable a :

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)a - b = 0 \Rightarrow b = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)a$$

De lo anterior se tiene que $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)a \end{pmatrix}, a \neq 0$

Para $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1-x_2 & -1 \\ -1 & -x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Elegimos la primera fila y fijamos la variable c :

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)c - d = 0 \Rightarrow d = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)c$$

De lo anterior se tiene que $v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)c \end{pmatrix}, c \neq 0 \quad \square$

(30 puntos)