

PAUTA TEST N° 2 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ CARRERA: _____
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS FECHA : Lu 02/09/24

1) Calcule A si $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(30 puntos)

Solución:

En primer lugar nos conviene calcular la determinante de la matriz A^{-1} , para saber si posee inversa.

$$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = -1 \neq 0$$

Sabemos que $(A^{-1})^{-1} = A$, por lo que debemos calcular la inversa de la matriz que nos entregan.

Camino 1 (Operaciones Elementales):

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1(-1)+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(1)+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(-1); F_3(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3(-1)+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \square$$

Camino 2 (Método de la Adjunta)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) = -\text{Adj}(A)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

$$c_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 0) = 0$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$c_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 1) = 1$$

$$c_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{32} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 0) = 0$$

$$c_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

$$c_{23} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(0 + 1) = -1$$

$$c_{33} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \square$$

2) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando su respuesta.

a) V Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $|(A^5)^T| = |A^3|$

Justificación:

Camino Largo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -16 \\ -16 & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^5 = A^4 A = \begin{bmatrix} 16 & -16 \\ -16 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & -64 \\ -64 & 64 \end{bmatrix}$$

$$(A^5)^T = \begin{bmatrix} 64 & -64 \\ -64 & 64 \end{bmatrix} \Rightarrow |(A^5)^T| = (64)(64) - (-64)(-64) = 0$$

$$|A^3| = (4)(4) - (-4)(-4) = 16 - 16 = 0$$

Observamos que $|(A^5)^T| = |A^3|$ $\square$

Camino Corto:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 1 - 1 = 0$$

$$|(A^5)^T| = |A^5| = |A|^5 = 0^5 = 0$$

$$|A^3| = |A|^3 = 0^3 = 0$$

Luego, $|(A^5)^T| = |A^3|$ $\square$

b) F $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ x & 0 & -1 \end{vmatrix} = x$ si $x \in \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$

(30 puntos)

Justificación:

Camino 1 (Resolver la Ecuación):

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ x & 0 & -1 \end{vmatrix} = x \Rightarrow 1 + 0 + 0 + x^2 - 0 + x = x \Rightarrow x^2 + 1 + x - x = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = -i \end{cases}$$

Observamos que las soluciones son complejas y no coinciden con los valores del conjunto $\{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ $\square$

Camino 2 (Reemplazar los valores dados en la determinante y comparar):

$$x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 - \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 - \sqrt{2} & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$1 + (1 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2} = 1 + 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1 - \sqrt{2} = 5 - 3\sqrt{2} \neq 1 - \sqrt{2}$$

Esto muestra que $x = 1 - \sqrt{2}$ no satisface la ecuación dada y por lo tanto el enunciado es falso porque ya un elemento del conjunto $\{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ no cumple la ecuación. $\square$