UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST N° 2 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS FECHA : Ju 28/09/23

1) Resuelva, si es posible, el sistema

$x - ay = 5$
$ax + y = -3$

con $a \in \mathbb{R}$ constante

$(30\, puntos)$

Solución:
Escribamos el sistema en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -a & | & 5 \\ a & 1 & | & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow^{F_1(-a)+F_2} \begin{bmatrix} 1 & -a & | & 5 \\ 0 & 1+a^2 & | & -3-5a \end{bmatrix}$$

Observamos que $1 + a^2$ es un número siempre distinto de cero, por lo que $r_A = 2 = r_{Ab} = N$, es decir, el sistema posee una solución para $a \neq 0$
Resolvamos el sistema
$(1 + a^2)y = -3 - 5a \Rightarrow y = \frac{-3-5a}{1+a^2}$

$x - ay = 5 \Rightarrow x = 5 + ay \Rightarrow x = 5 + a\frac{-3-5a}{1+a^2} \Rightarrow x = \frac{5+5a^2-3a-5a^2}{1+a^2} \Rightarrow x = \frac{5-3a}{1+a^2}$

El vector solución para $a \neq 0$ es $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5-3a}{1+a^2} \\ \frac{-3-5a}{1+a^2} \end{bmatrix}$
Ahora para $a = 0$, reemplazando en el sistema original, se tiene

$x = 5\,;\ y = -3$ ❑

2) Resuelva el sistema

$3x - 2y + z = 1$
$z = 1 - x + 2y$

$(30\, puntos)$

Solución:
Ordenemos las ecuaciones antes de escribir el sistema en forma matricial
$3x - 2y + z = 1$
$x - 2y + z = 1$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & | & 1 \\ 1 & -2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_{12}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 3 & -2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_1(-3)+F_2}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & \quad y & \quad z & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 4 & -2 & | & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Tenemos que $r_A = 2 = r_{Ab} < N = 3$, es decir, el sistema posee infinitas soluciones.

Debemos fijar $N - r_A = 4 - 3 = 1$ incógnita
Fijemos $z = c$
$4y - 2c = -2 \Rightarrow 4y = 2c - 2 \Rightarrow y = \frac{c-1}{2}$

$x - 2y + c = 1 \Rightarrow x = 1 + 2y - c \Rightarrow x = 1 + c - 1 - c \Rightarrow x = 0$

Los vectores solución tienen la forma $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c-1}{2} \\ c \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R}$ $\square$