

PAUTA TEST N° 2 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL – INGENIERÍA
AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA :** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 10 MINUTOS **FECHA : Ju 08/10/20**

1) Sea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ no singular.

Calcule $\det(A)$, si se sabe que

$$|(A^{-1} \cdot A^T)^{-1} \cdot (F_{12}(A)) \cdot (F_4(-5)(A)) \cdot ((F_1(8) + F_3)(A))| = 5$$

Justifique su respuesta.

(Indicación: Use propiedades del determinante)

(20 puntos)

Solución:

$$|(A^{-1} \cdot (A^T)^{-1}) \cdot (F_{12}(A)) \cdot ((F_4(-5))(A)) \cdot ((F_1(8) + F_3)(A))| = 5 \Rightarrow$$

$$|((A^T)^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1})| |(F_{12}(A))| |((F_4(-5))(A))| |((F_1(8) + F_3)(A))| = 5 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|A^T|} |A| |(F_{12}(A))| |((F_4(-5))(A))| |((F_1(8) + F_3)(A))| = 5 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|A|} |A| |(F_{12}(A))| |((F_4(-5))(A))| |((F_1(8) + F_3)(A))| = 5 \Rightarrow$$

$$(-|A|)(-5|A|)|A| = 5 \Rightarrow 5|A|^3 = 5 \Rightarrow |A|^3 = 1 \Rightarrow |A| = 1 \quad \square$$

$$2) \text{ Sea } [J(x)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Obtenga, si existen, las terceras filas de $J(\frac{1}{5})$ y $J(\frac{2}{5})$

(40 puntos)

Solución:

Calculemos en primer lugar el determinante de $[J(x)]^{-1}$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - x + 0 - 0 - 0 - 4x = 2 - 5x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

Sabemos que $([J(x)]^{-1})^{-1} = J(x)$

Tenemos que la matriz $J(x)$ no existe si $x = \frac{2}{5}$

Obtengamos la tercera fila de $J(\frac{1}{5})$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_1(-2)+F_2; F_1(-1)+F_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_2(5/3)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5/3 & -10/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_2(1/5)+F_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5/3 & -10/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & -5/3 & 1/3 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_3(3/5)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5/3 & -10/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/5 & 3/5 \end{array} \right]$$

La tercera fila de $J(\frac{1}{5})$ es $[-1 \quad 1/5 \quad 3/5]$

Otra forma para obtener la tercera fila de $J(\frac{1}{5})$ es usar el método de la

adjunta, notando que $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 5(\frac{1}{5}) = 2 - 1 = 1$

Tenemos que $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$

De lo anterior, observamos que para obtener la tercera fila necesitamos calcular c_{13} , c_{23} y c_{33}

$$c_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$c_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}$$

$$c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Finalmente, la tercera fila de $J(\frac{1}{5})$ es $[-1 \quad 1/5 \quad 3/5]$ $\square$