UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST N° 2 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 50 MINUTOS FECHA : Ju 26/03/26

Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

$a)$ ___V___ Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $(A^3)^T = (A^T)^3$

Justificación:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(A^3)^T = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Notemos que A es simétrica, luego $A^T = A$, es decir,

$$(A^T)^3 = A^3 = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Observamos que $(A^3)^T = (A^T)^3$ ❑

$b)$ ___F___ $(A - B)^2 = A^2 - B^2$, con $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Justificación:

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observamos que $(A-B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A^2 - B^2$ $\square$

$c)$ ___F___ $(A-B)^2 = (A+B)^2$, si A es simétrica y B escalar, de órdenes apropiados.

Justificación:

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ una matriz simétrica y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ una matriz escalar.

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Observamos que $(A-B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = (A+B)^2$ $\square$

(60 puntos)