UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST N° 2 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS FECHA : Ju 21/03/24

1) Muestre que la propiedad $(A\,B)^{-1}=B^{-1}\,A^{-1}$ se verifica para
$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

(30 puntos)

<u>Solución:</u>
Calculemos en primer lugar AB

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Calculemos ahora la inversa de AB

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\longrightarrow F_1(-2)+F_2\,;F_1(-1)+F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\longrightarrow F_2(1/3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -2/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\longrightarrow F_2(-2)+F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -2/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1/3 & -2/3 & 1\end{array}\right)\longrightarrow F_3(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -2/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & -1\end{array}\right)\longrightarrow F_3(-1)+F_2\,;F_3(1)+F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 2/3 & 2/3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & -1\end{array}\right)\longrightarrow F_2(1)+F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & -1 \end{array}\right)$$

Luego $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \\ -1/3 & 2/3 & -1 \end{pmatrix}$

Calculemos A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow {}^{F_3(1)+F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow {}^{F_2(1)+F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculemos B^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow {}^{F_{12}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow {}^{F_1(-2)+F_2\,;\,F_1(-1)+F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow {}^{F_2(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow {}^{F_2(-1)+F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow {}^{F_3(-1/3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1 & -1/3 \end{array}\right) \longrightarrow {}^{F_3(-2)+F_2\,;\,F_3(-1)+F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1 & -1/3 \end{array}\right)$$

Luego $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \\ -1/3 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$

Ahora

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \\ -1/3 & 1 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \\ -1/3 & 2/3 & -1 \end{pmatrix}$$

Observamos que $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$ ❑

2) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando su respuesta.

__F____ Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $(A^5)^T = (A^3)^T$

(30 puntos)

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^3)^T = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^5 = A^4A = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^5)^T = \begin{bmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Observamos que $(A^5)^T \neq (A^3)^T$ ❑