UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
***Juan Carlos Sandoval Avendaño***

# PAUTA TEST N° 2 ÁLGEBRA LINEAL
## INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA — INGENIERÌA EN ALIMENTOS

**NOMBRE :__________________________________________ CARRERA:________**
**TIEMPO MÁXIMO : 28 MINUTOS FECHA : Ju 23/03/17**

Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando todas sus respuestas.**

$a)$__V__ La matriz $A^2 \cdot A^T$ es simétrica, si $A$ es simétrica y de orden $2$
**Justificación:**
Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, que es simétrica y de orden $2$.
Tenemos que

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ab + bc \\ ab + bc & b^2 + c^2 \end{bmatrix}$$

$$A^T = A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Luego

$$A^2 \cdot A^T = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ab + bc \\ ab + bc & b^2 + c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a(a^2 + b^2) + b(ab + bc) & b(a^2 + b^2) + c(ab + bc) \\ a(ab + bc) + b(b^2 + c^2) & b(ab + bc) + c(b^2 + c^2) \end{bmatrix}$$

Pero

$$b(a^2 + b^2) + c(ab + bc) = ba^2 + b^3 + abc + bc^2$$

$$a(ab + bc) + b(b^2 + c^2) = a^2b + abc + b^3 + bc^2$$

Esto muestra que el elemento en la posición $(1,2)$ es igual a aquel en la posición $(2,1)$, es decir, la matriz $A^2 \cdot A^T$ es simétrica.

Otra forma de probar lo anterior es usando propiedades, y recordando que una matriz $B$ es simétrica si $B^T = B$

$$B = A^2 \cdot A^T = A^3 \Rightarrow B^T = (A^2 \cdot A^T)^T = (A^T)^T (A^2)^T = A(A \cdot A)^T = A(A^T \cdot A^T)$$
$$= A \cdot A \cdot A = A^3 = B \; \square$$

$b)$ ___F__ El producto de una matriz diagonal con otra antisimétrica, ambas de orden $3$, es siempre antisimétrica

**Justificación:**

Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ que es de orden $3$ y antisimétrica.

Consideremos la matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Tenemos que

$$D \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

no es una matriz antisimétrica, pues los elementos extradiagonales correspondientes no son iguales y con signos distintos. $\square$

$c)$ ___F___ $\frac{1}{2}(A + A^T) \cdot (A - A^T)$ es simétrica, si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**Justificación:**

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A + A^T) \cdot (A - A^T) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observamos que $(A + A^T) \cdot (A - A^T)$ no es simétrica y tampoco lo será la misma matriz multiplicada por un escalar. ❑

$d)$ ___V___ El producto, si existe, de una matriz fila por otra matriz columna genera siempre una matriz de orden $1$.

**Justificación:**

Tenemos que, $F_{1\times n} \cdot C_{n\times 1} = M_{1\times 1}$

con $F$ una matriz fila y $C$ una matriz columna.

Observemos que el producto debe existir de acuerdo al enunciado. ❑

**(60 puntos).**